Интернет Университет Суперкомпьютерных технологий

Лекция 6

Сортировка данных с точки зрения МВС (часть 2)

Учебный курс

Введение в параллельные алгоритмы

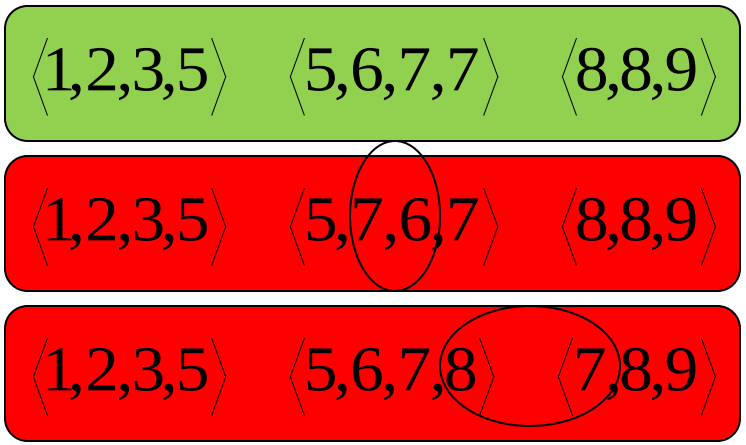
Якобовский Михаил Владимирович
чл.-кор. РАН, проф., д.ф.-м.н.
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Расположить в порядке неубывания *N* элементов массива чисел, используя *p* процессоров

Задача B

- Части массива хранятся на нескольких процессорах
  - Каждая часть массива должна быть упорядочена
  - На процессорах с б***о***льшими номерами должны быть размещены элементы массива с б***о***льшими значениями

- Правильно
- Ошибка
- Ошибка

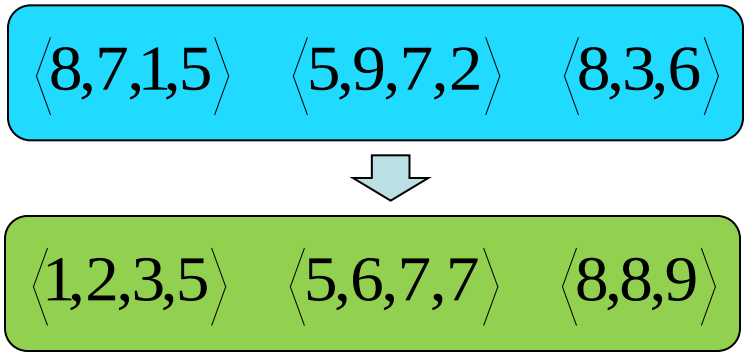


$N = 11$

$p = 3$

Задача B

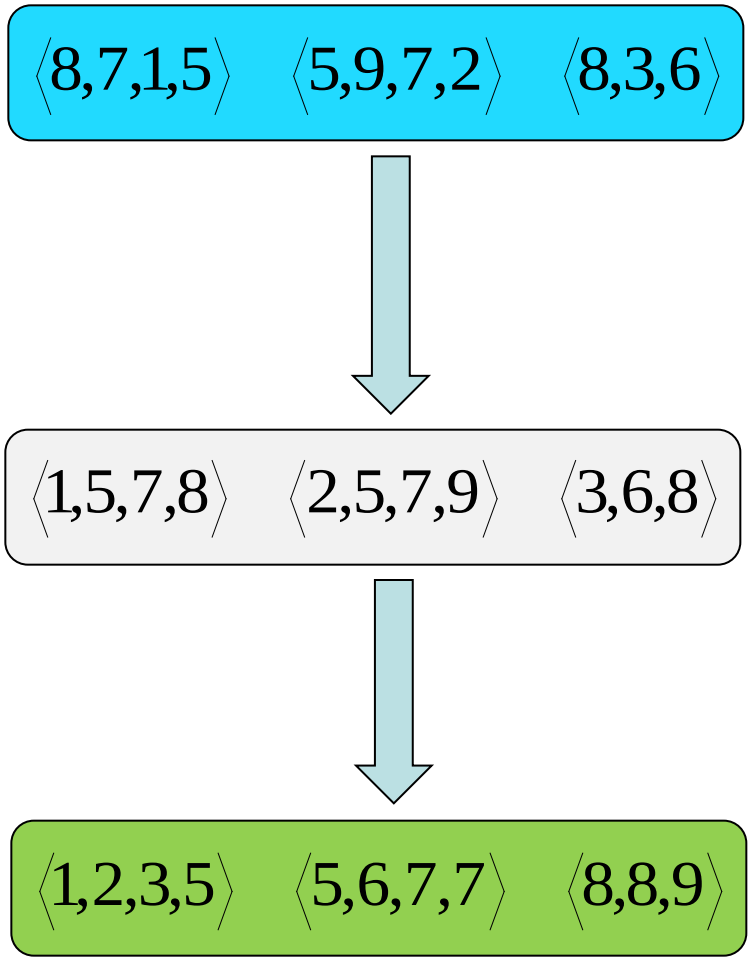
- Будем рассматривать только процесс упорядочивания элементов:
  - Перед началом сортировки на каждом из процессоров уже есть часть элементов массива
  - После окончания сортировки на каждом из процессоров должно остаться столько элементов, сколько их было в начале (но, это уже другие элементы, ранее расположенные на других процессорах)



Предлагаемая стратегия: Этапы сортировки

– Упорядочивание фрагментов массива на каждом из процессоров

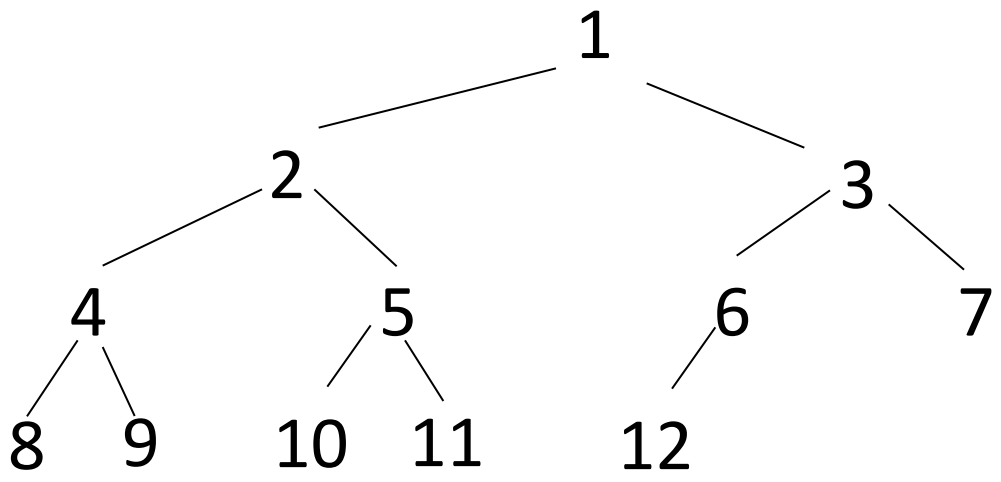
– Перераспределение элементов массива между процессорами

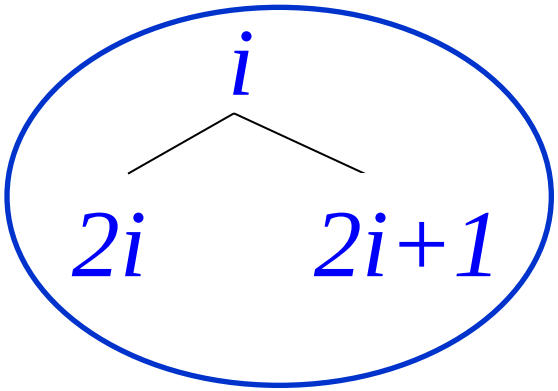


Пирамиды

- Дерево называют сбалансированным, если потомки любого его корня отличаются по высоте не более чем на 1
- Пирамида – сбалансированное бинарное дерево в котором левый потомок любого узла не ниже правого потомка

Пирамида





Потомки вершины i хранятся в элементах 2i, 2i+1

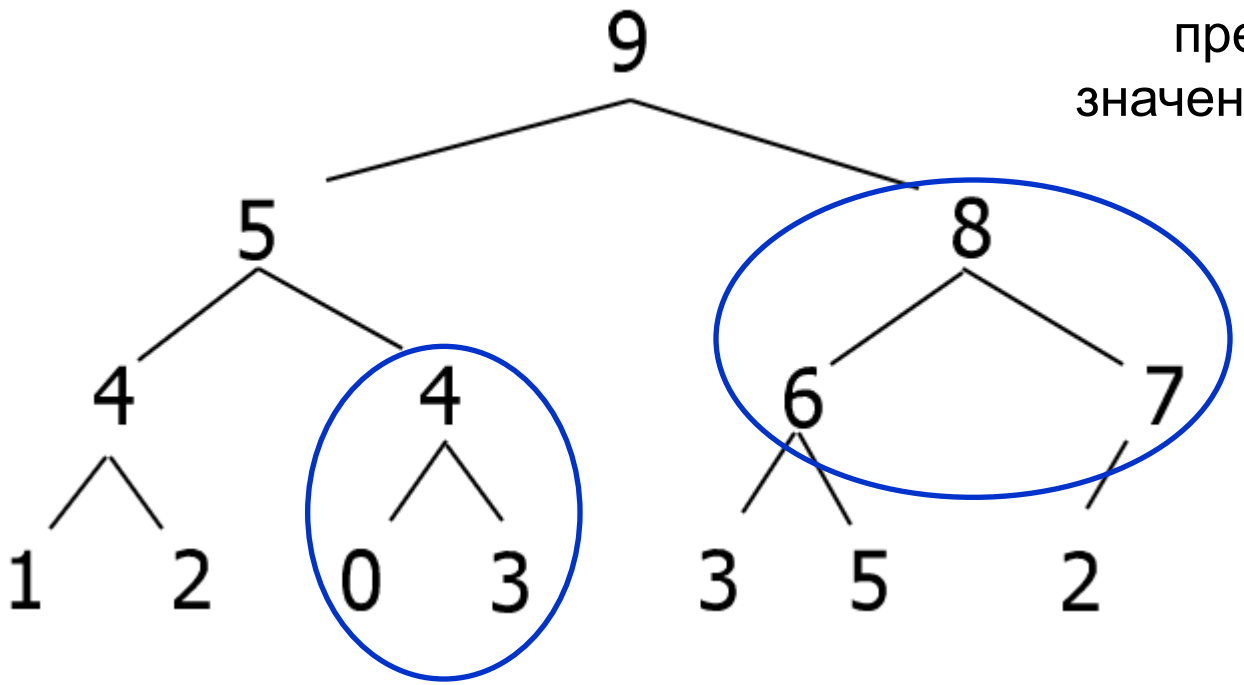
$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7 \ldots$$

$$a_1\ a_i\ a_3\ a_{2i}\ a_{2i+1}\ a_6\ a_7 \ldots$$

Упорядоченная пирамида

- 9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2

Значение любого потомка не превышает значения его корня

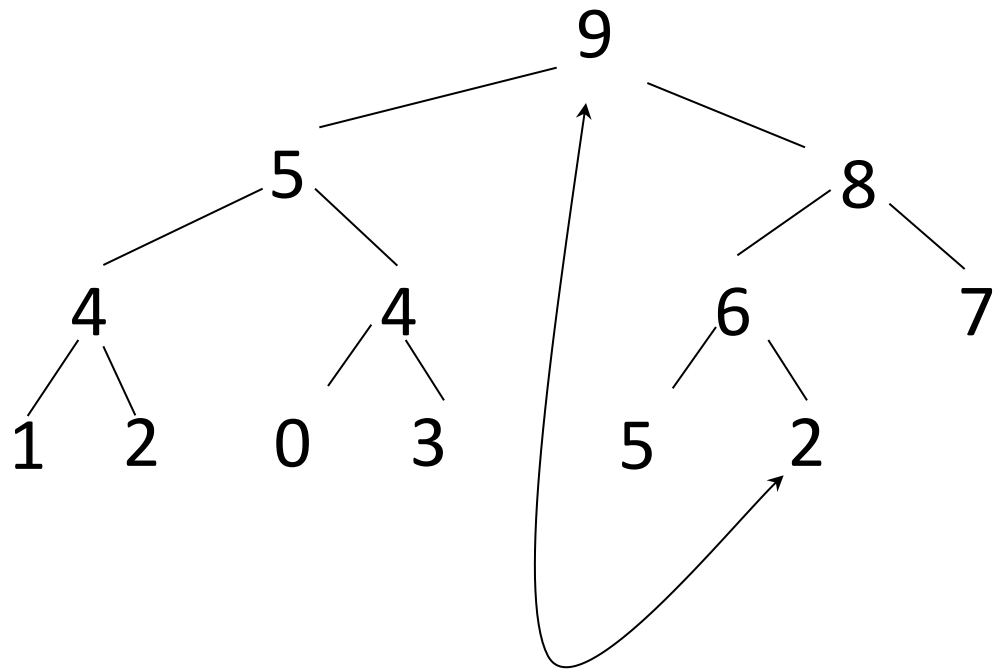


8 > 6
8 > 7

4 > 0
4 > 3

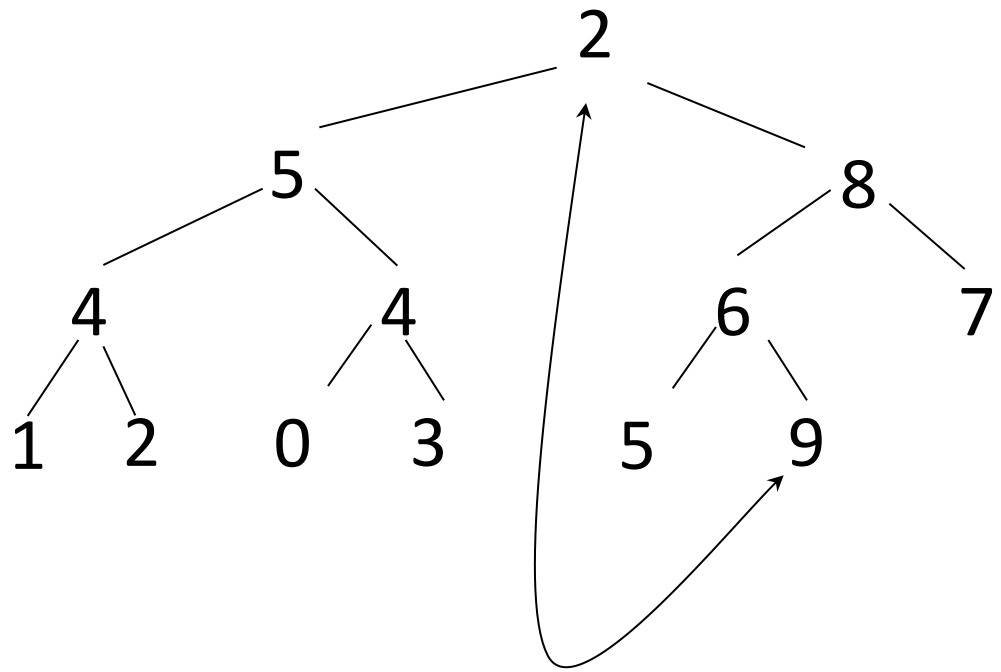
Поменять корень местами с последним потомком

- 9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2



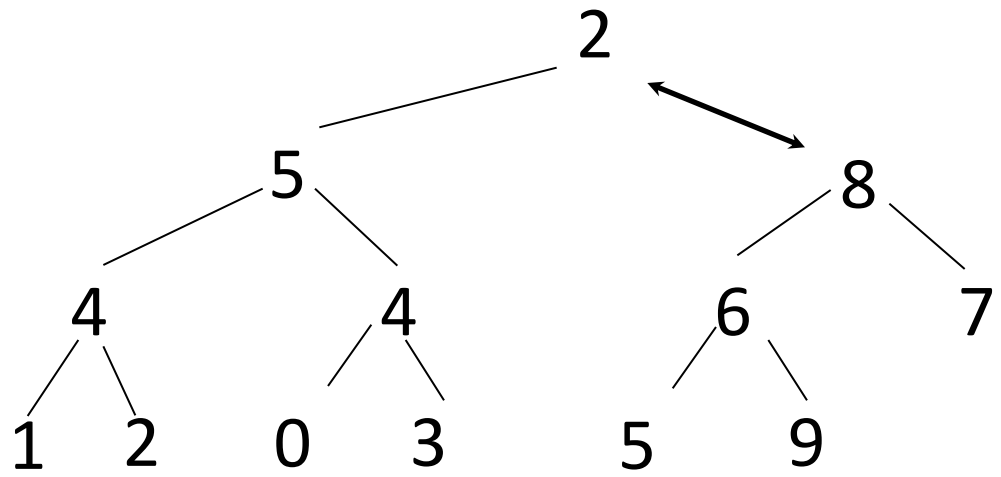
Поменять корень местами с последним потомком

- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



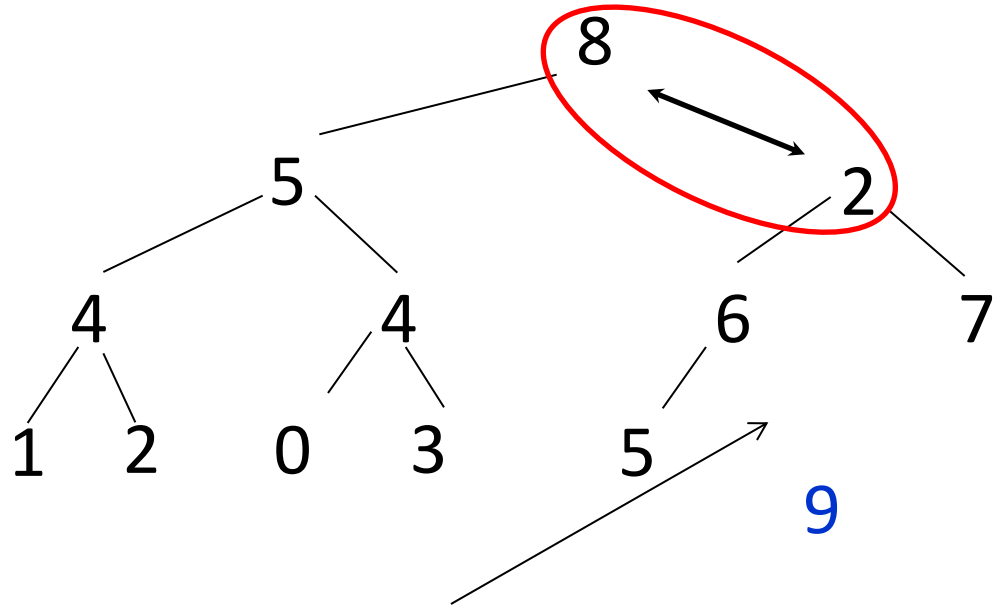
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

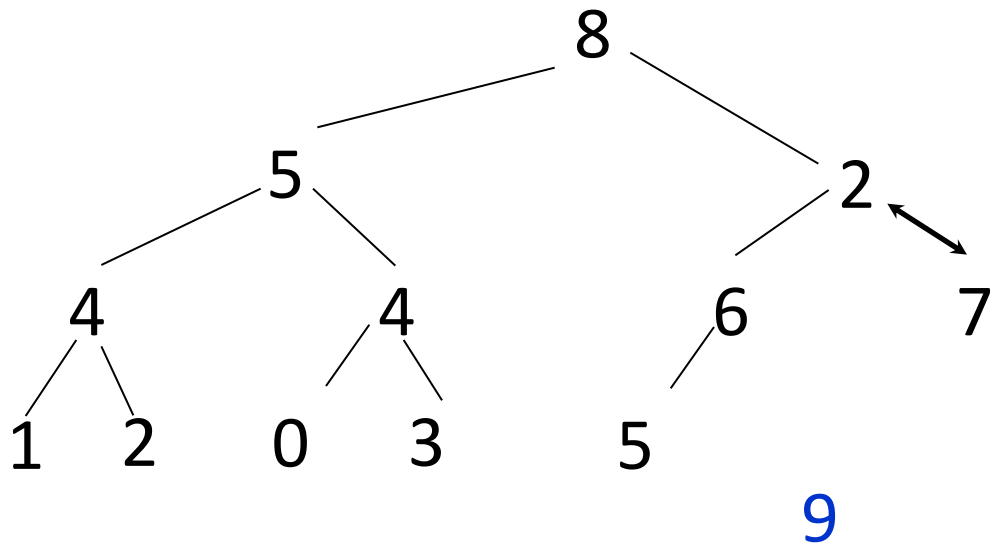
- 8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



Пирамида стала меньше и перестала быть упорядоченной

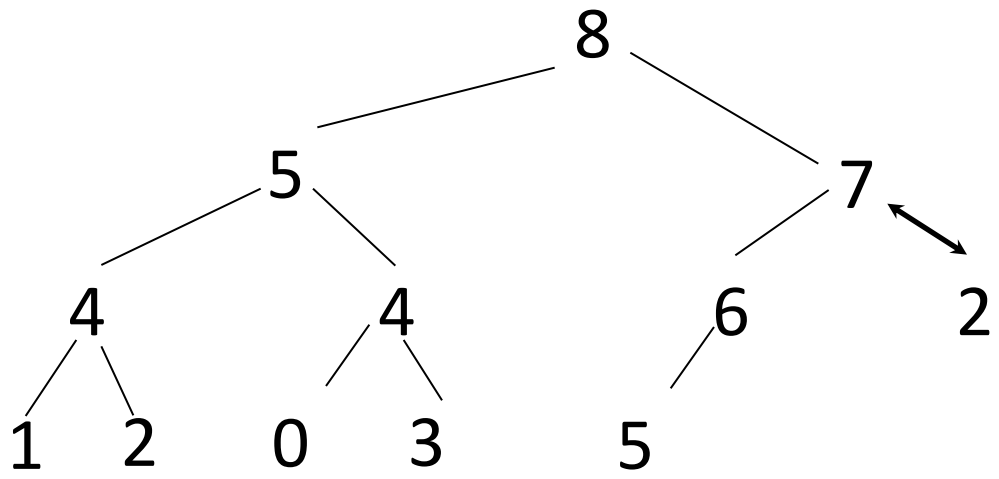
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

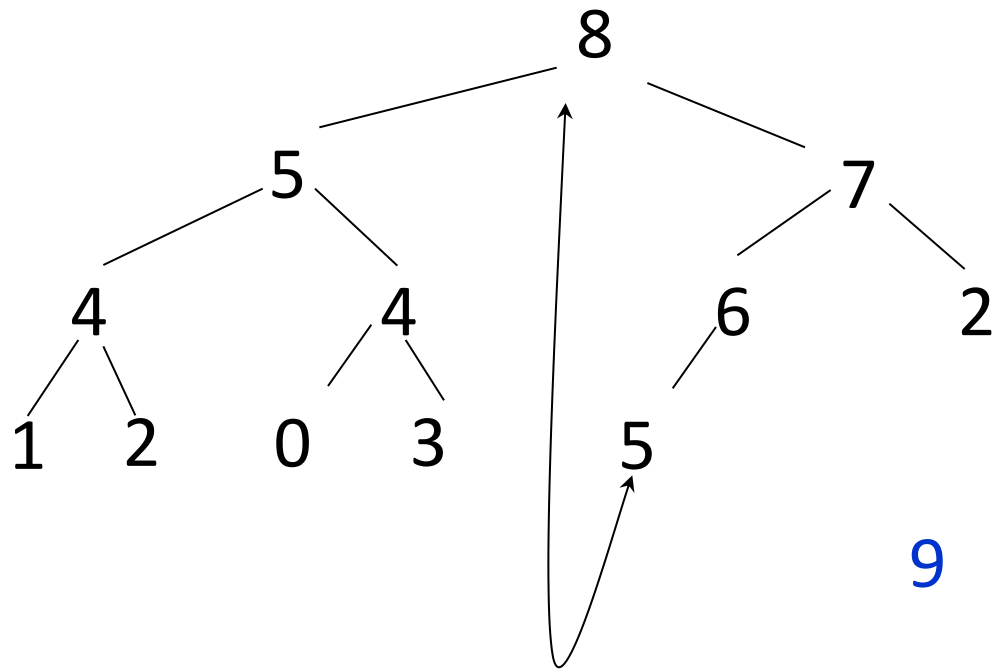
- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9



9

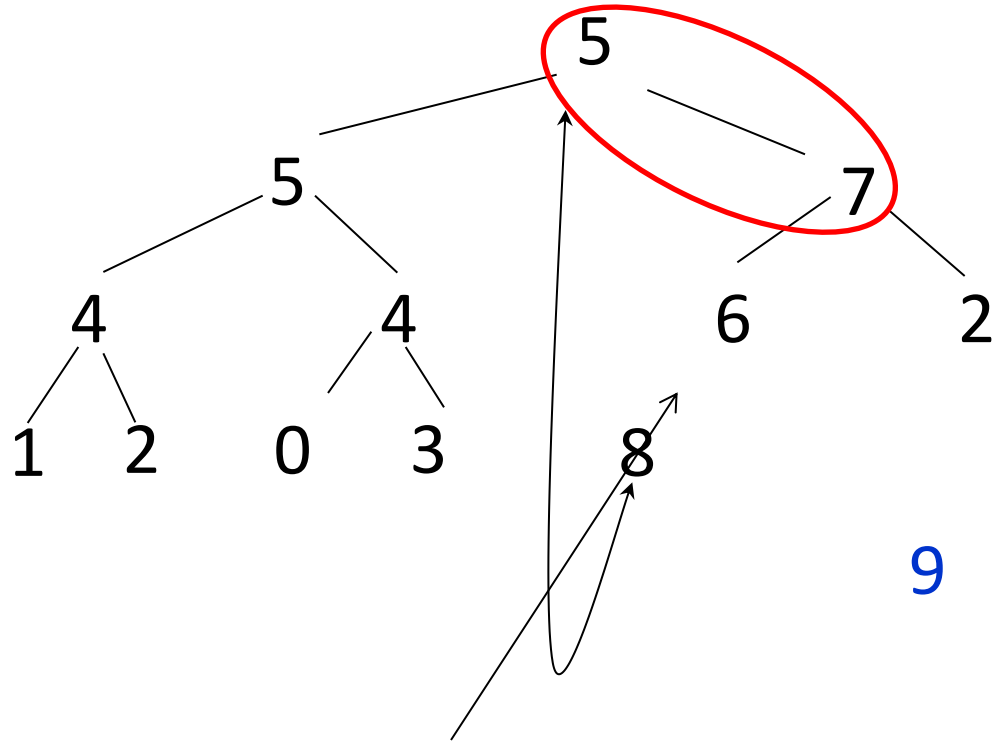
Поменять корень местами с последним потомком

- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9



Поменять корень местами с последним потомком

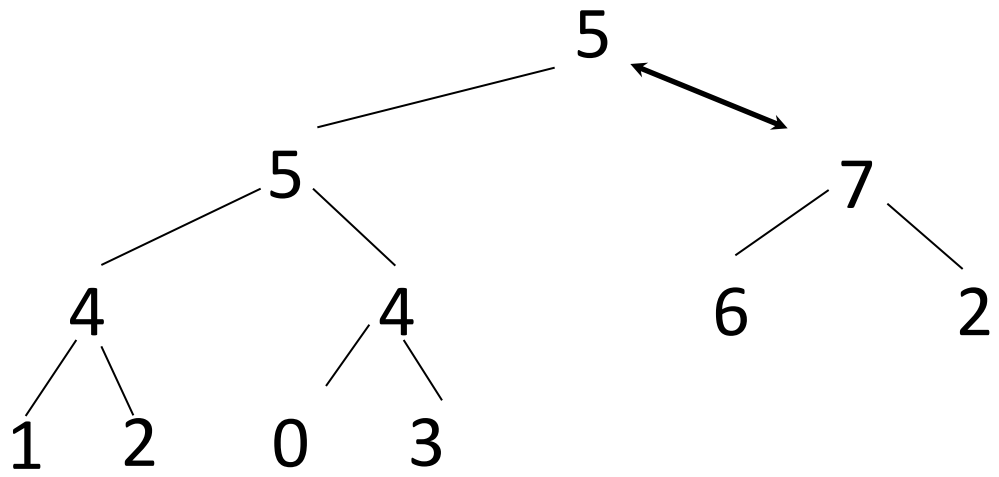
- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9



Пирамида стала меньше и перестала быть упорядоченной

Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

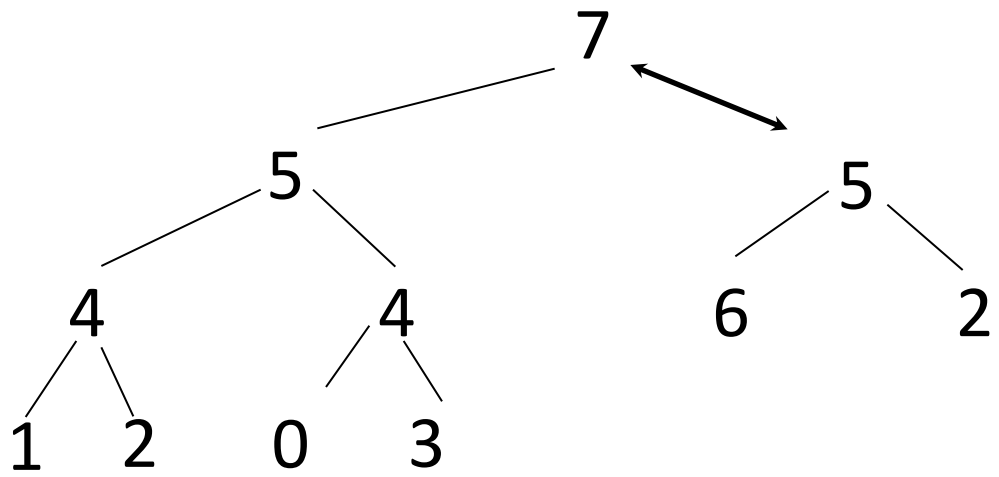
- 5 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9



8 9

Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

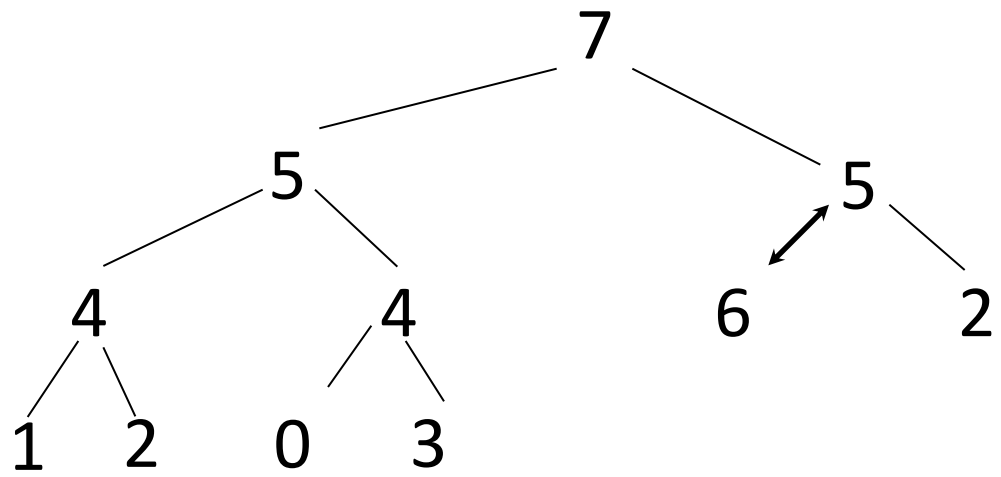
- 5 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9



8 9

Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

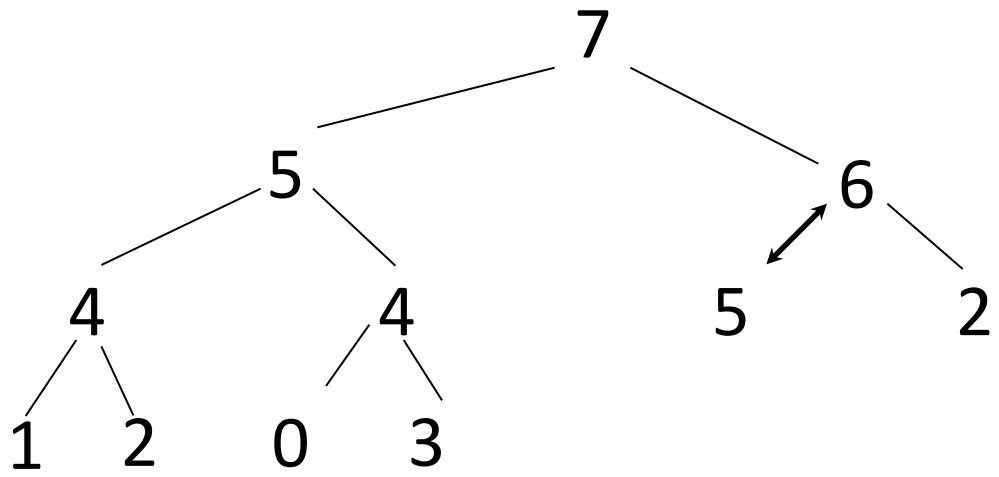
- 7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9



8 9

Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9



8 9

Пирамидальная сортировка – хаотичные обращения к памяти

меняем местами вершину пирамиды и последний элемент пирамиды

9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2 [

восстанавливаем упорядоченность пирамиды

2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9

8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9

меняем местами вершину пирамиды и последний элемент пирамиды

8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9

восстанавливаем упорядоченность пирамиды

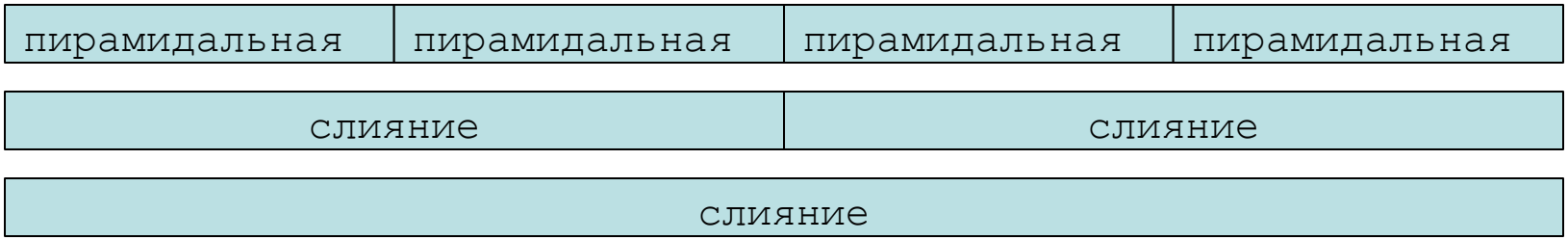
5 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9

7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9

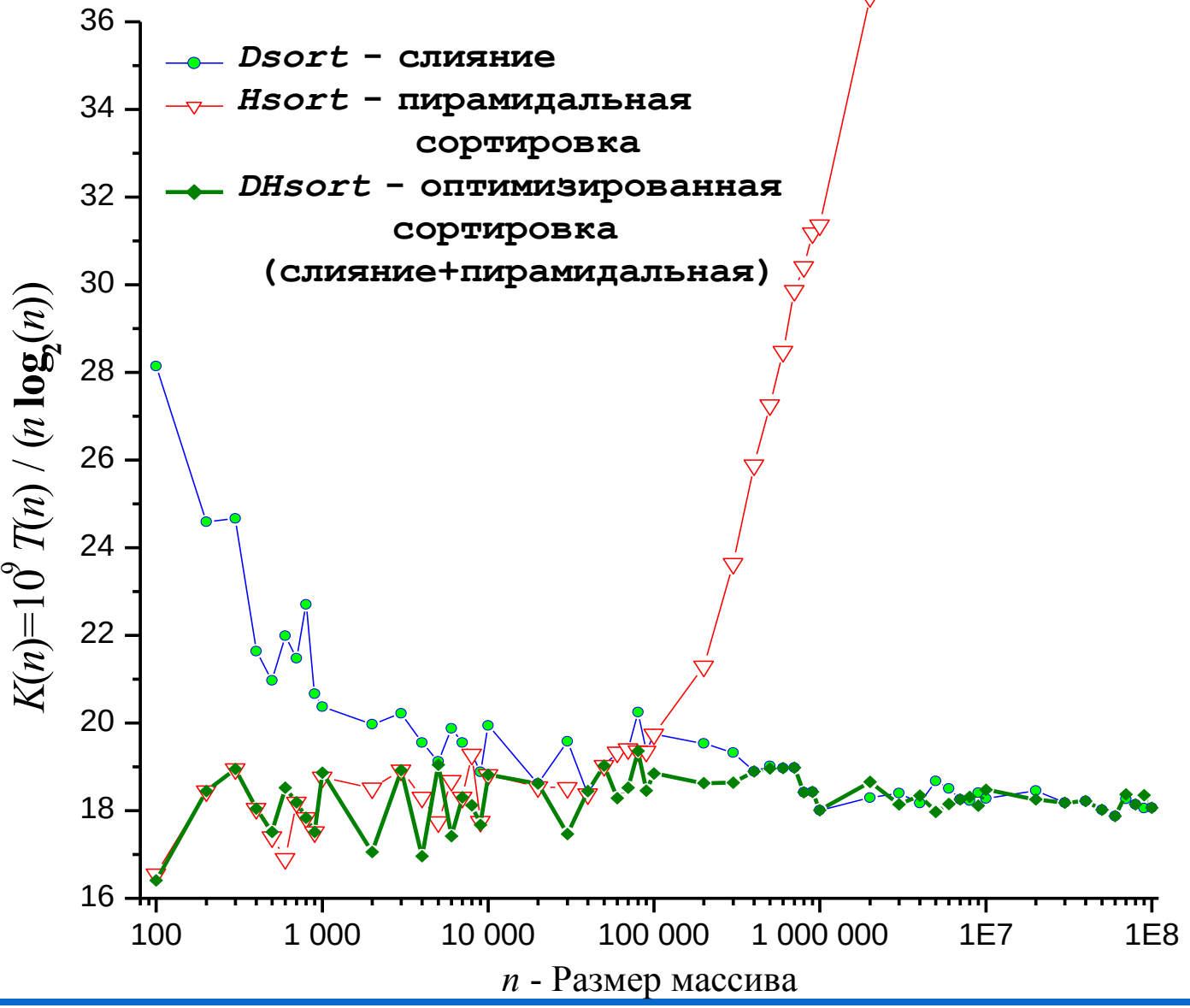
7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9

Оптимальный алгоритм

- Оптимальна комбинация:
- H алгоритм (пирамидальная сортировка) при n от 10 до 50 000
- DH алгоритм (пирамидальная сортировка блоков размером до 50 000 и их последующее слияние) при n больше 50 000

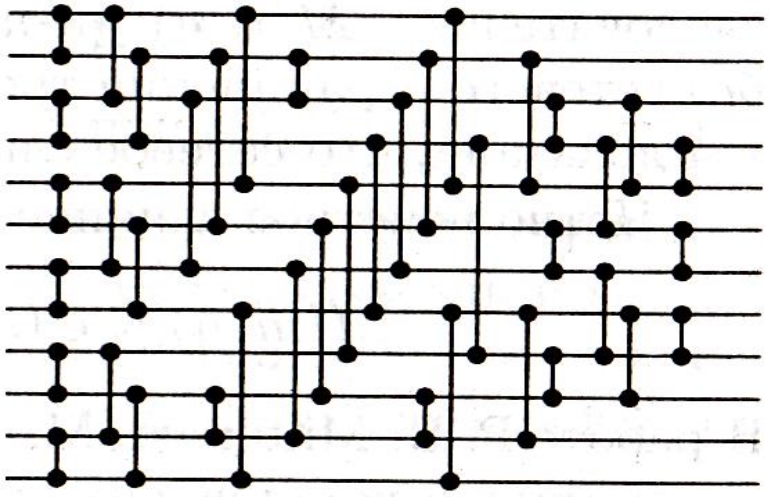


Константа времени сортировки наилучшего алгоритма

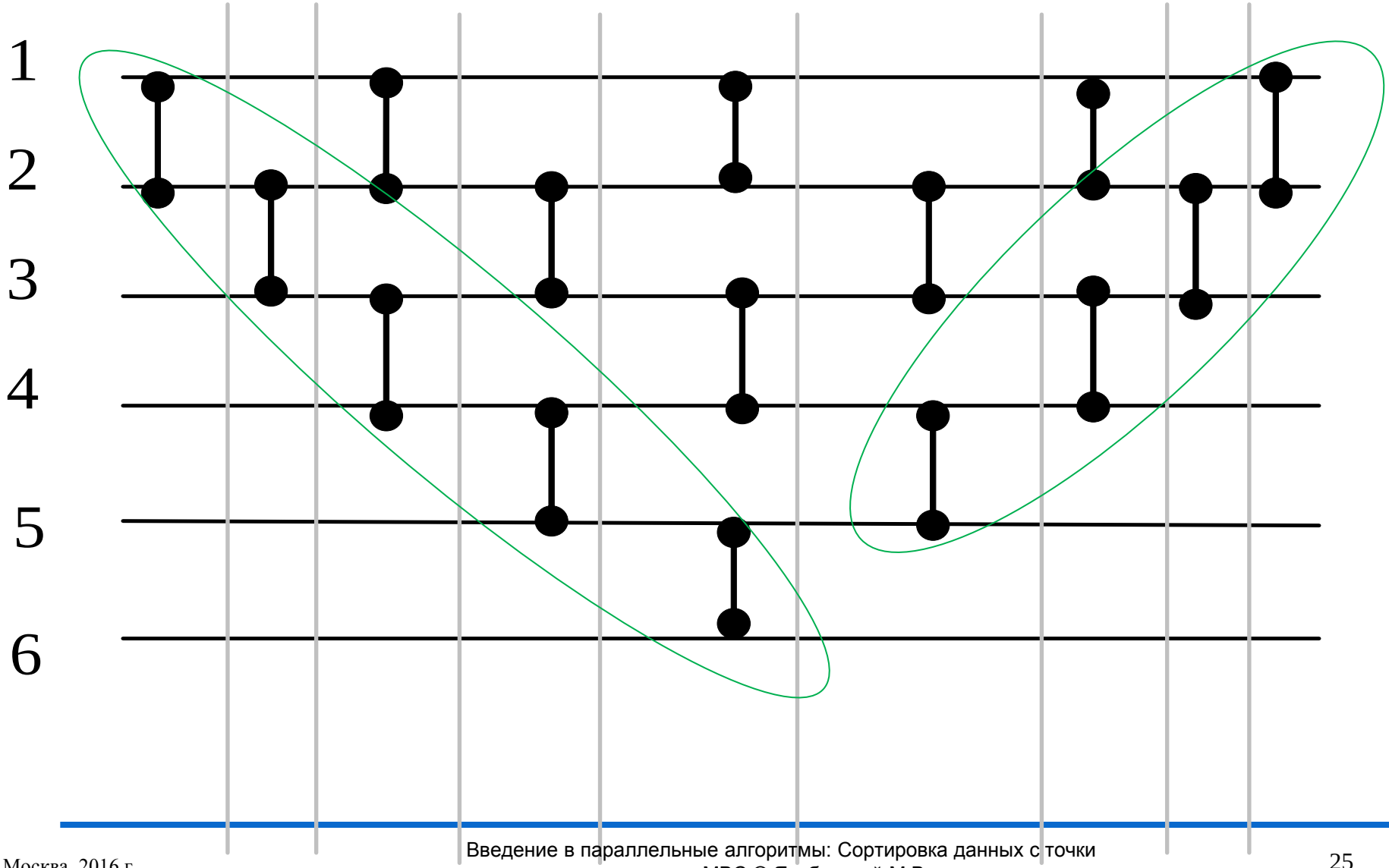


Сети сортировки

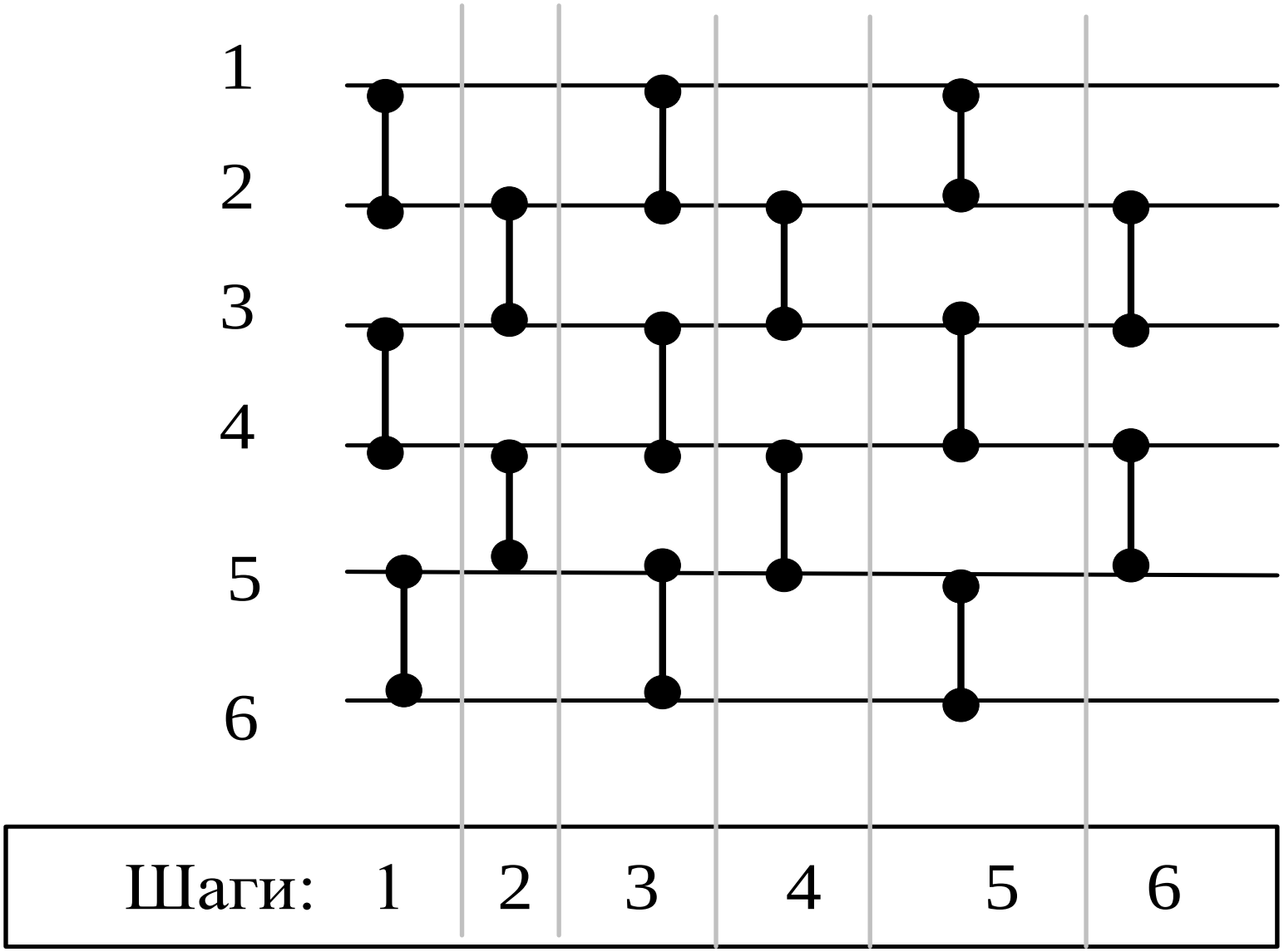
Быстрые параллельные алгоритмы основаны на сетях сортировки



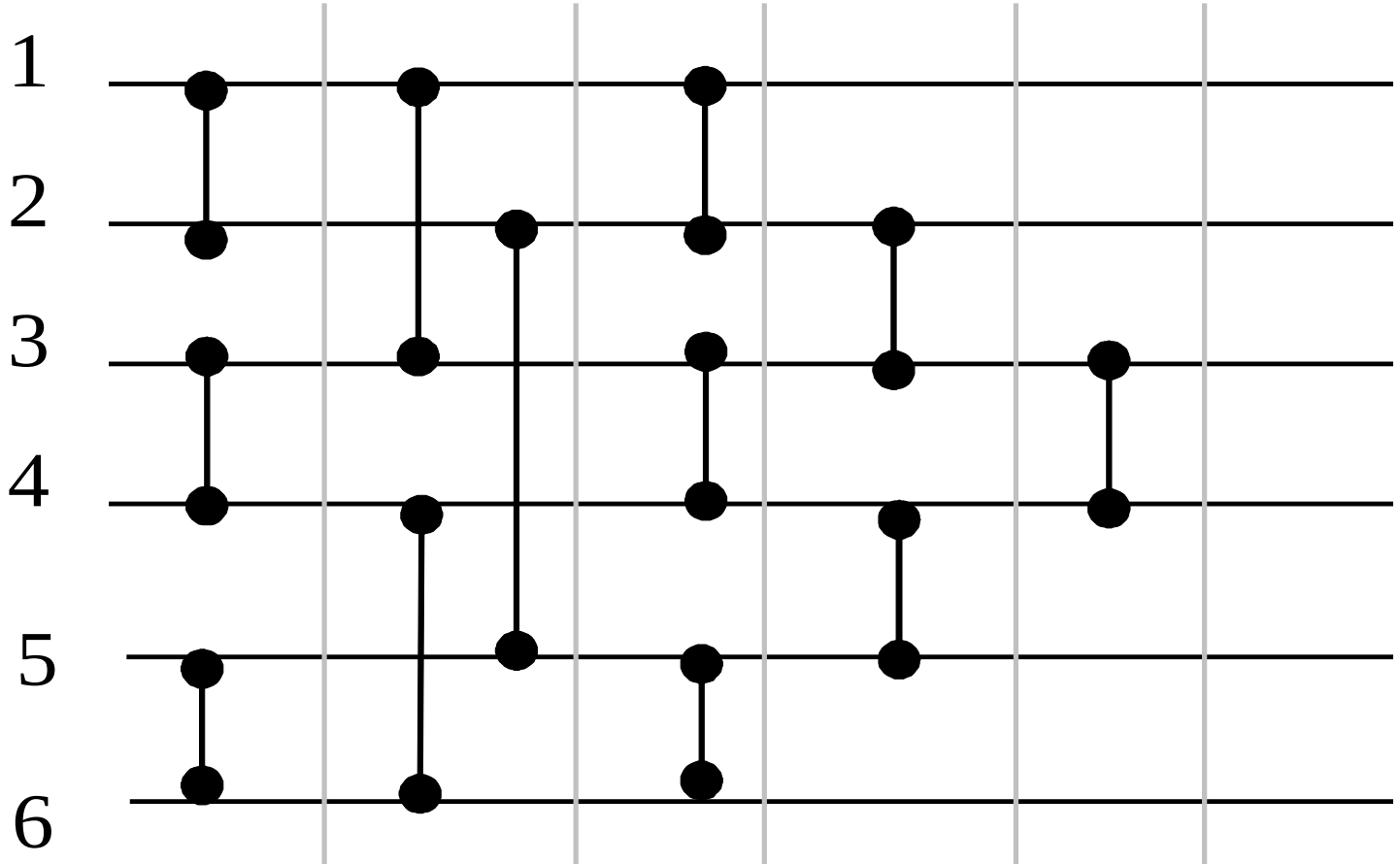
Сеть сортировки (пузырёк) *n=6 s=2n-3=9*



Сеть сортировки четно-нечетные перестановки *n=6 s=n=6*



Минимальная сеть сортировки n=6 s=5

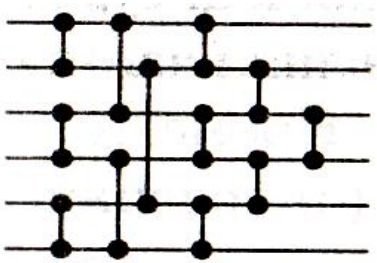


Шаги: 1 | 2 | 3 | 4 | 5

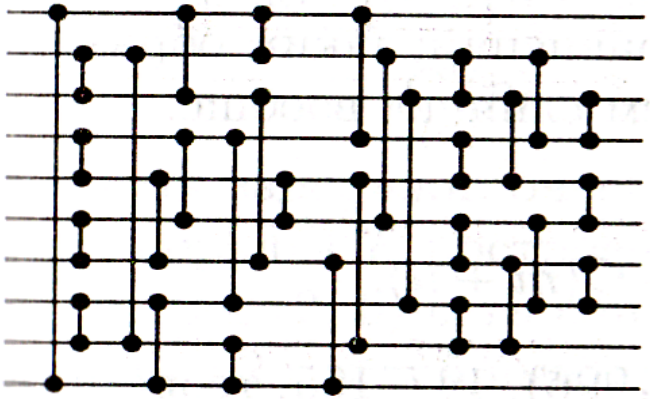
Минимальные сети сортировки

[Дн.Кнут]

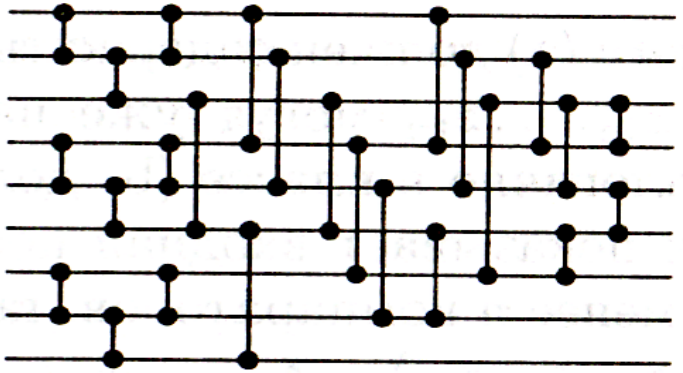
n=6 s=5



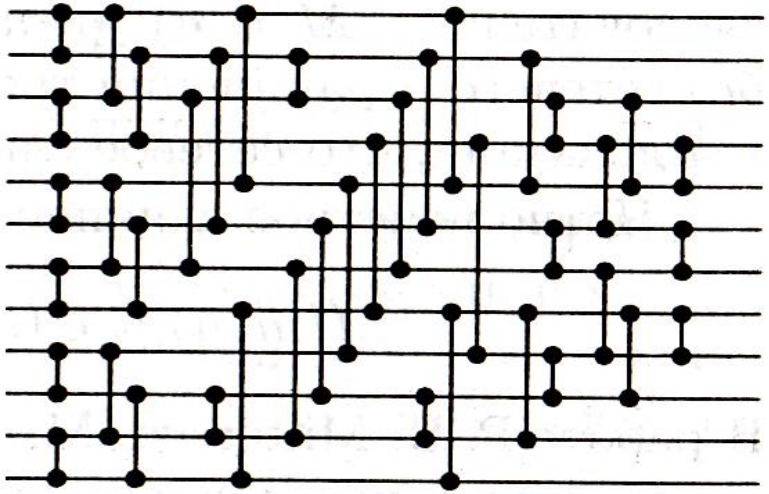
n=10 s=7



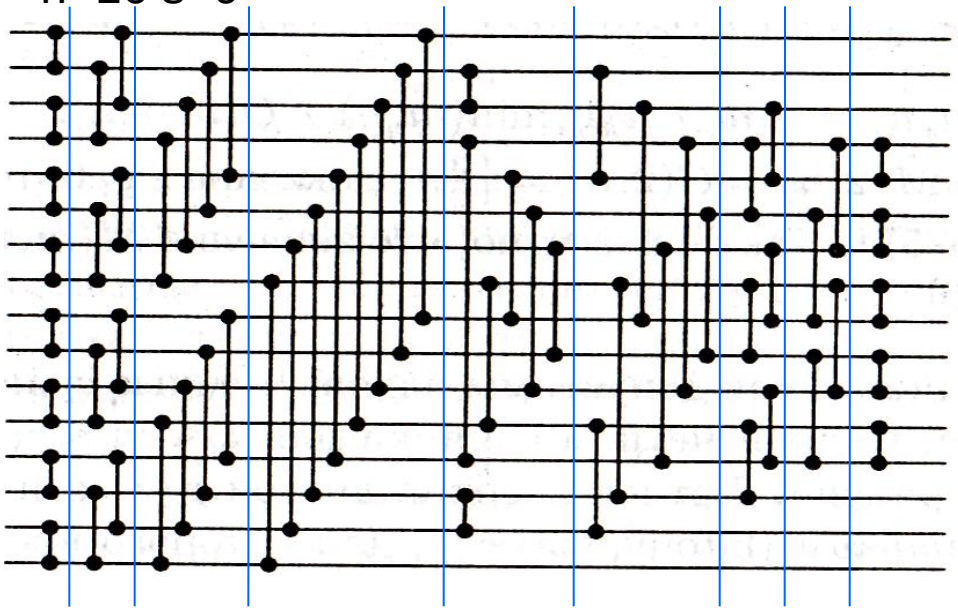
n=9 s=8



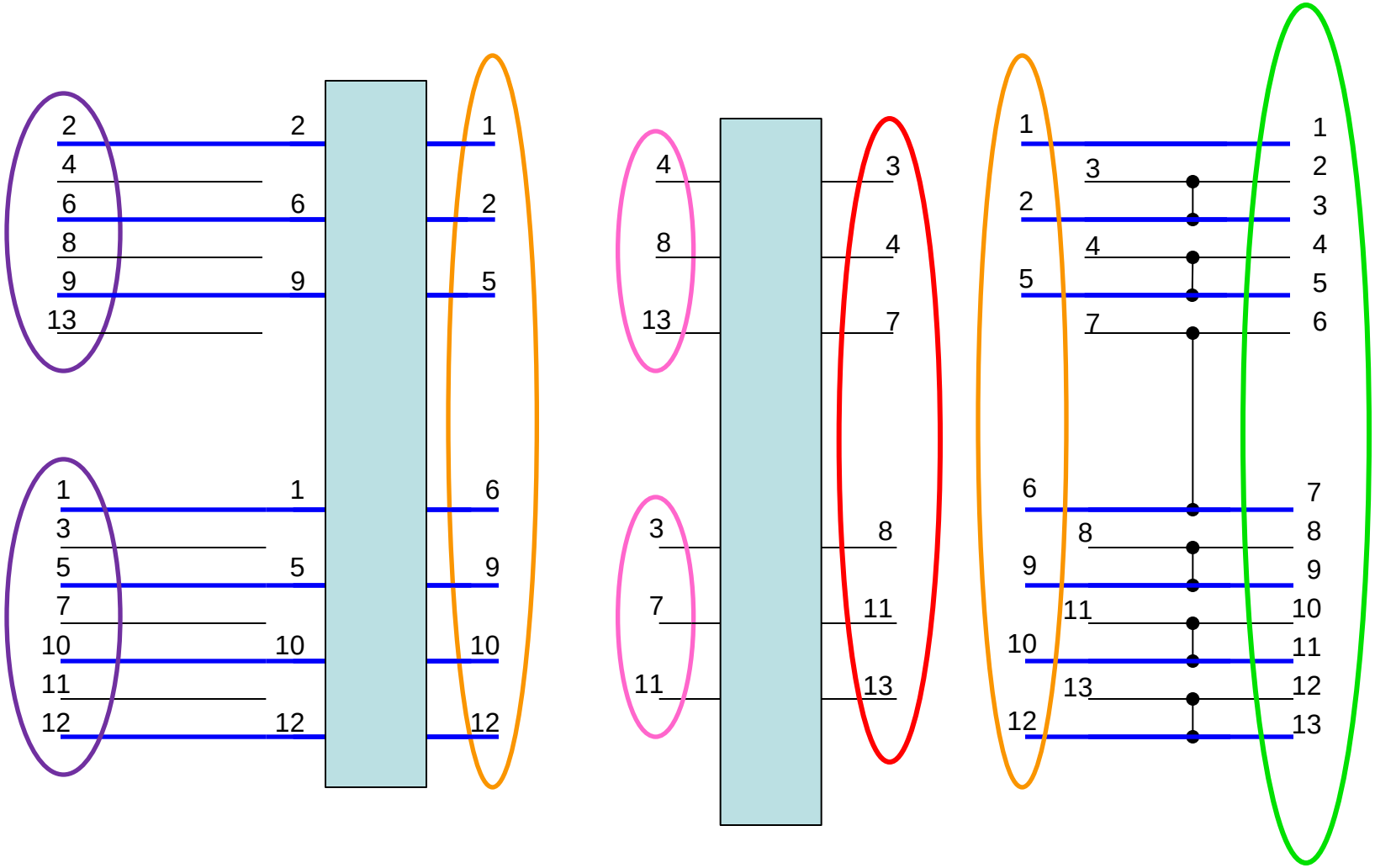
n=12 s=8



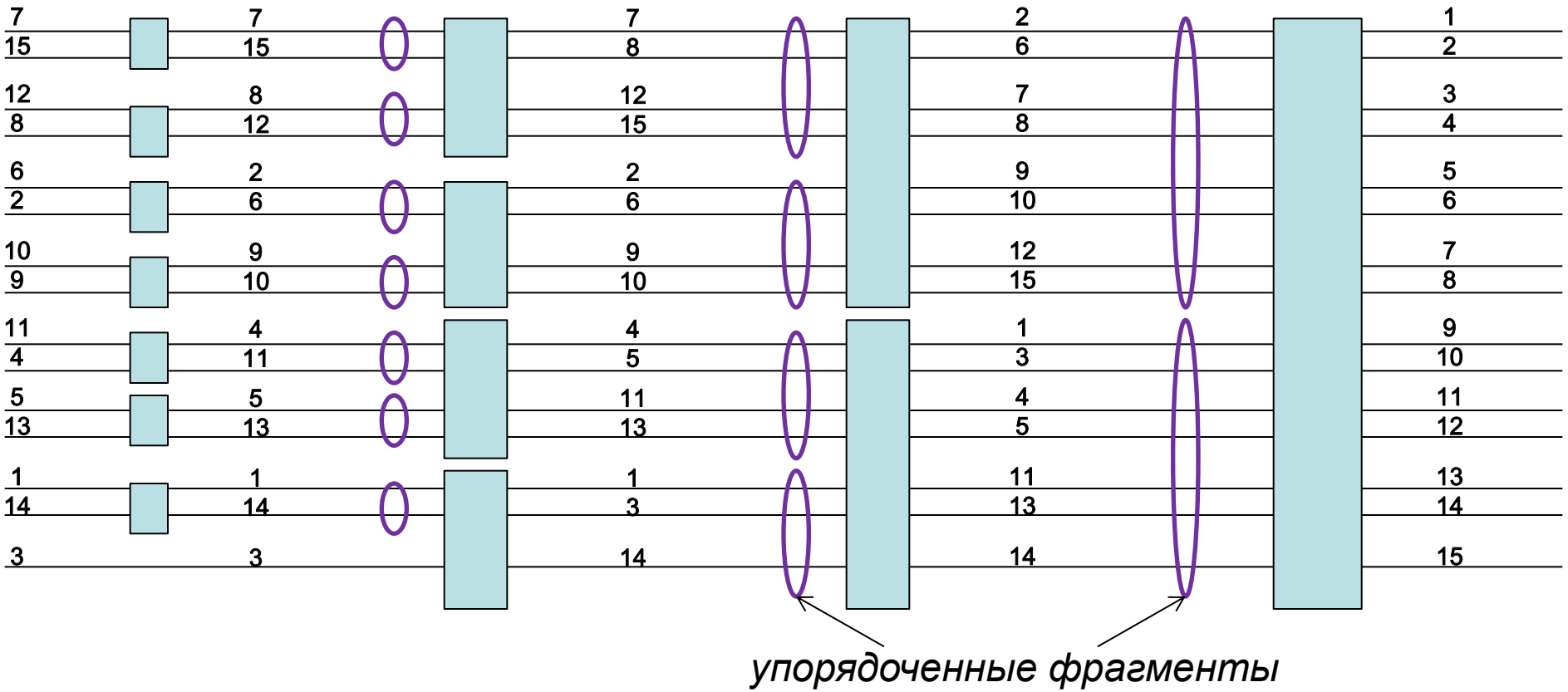
n=16 s=9



Четно-нечетное слияние Бетчера – масштабируемая сеть



Сортировка массива из 15 элементов на основе четно-нечетного слияния Бетчера



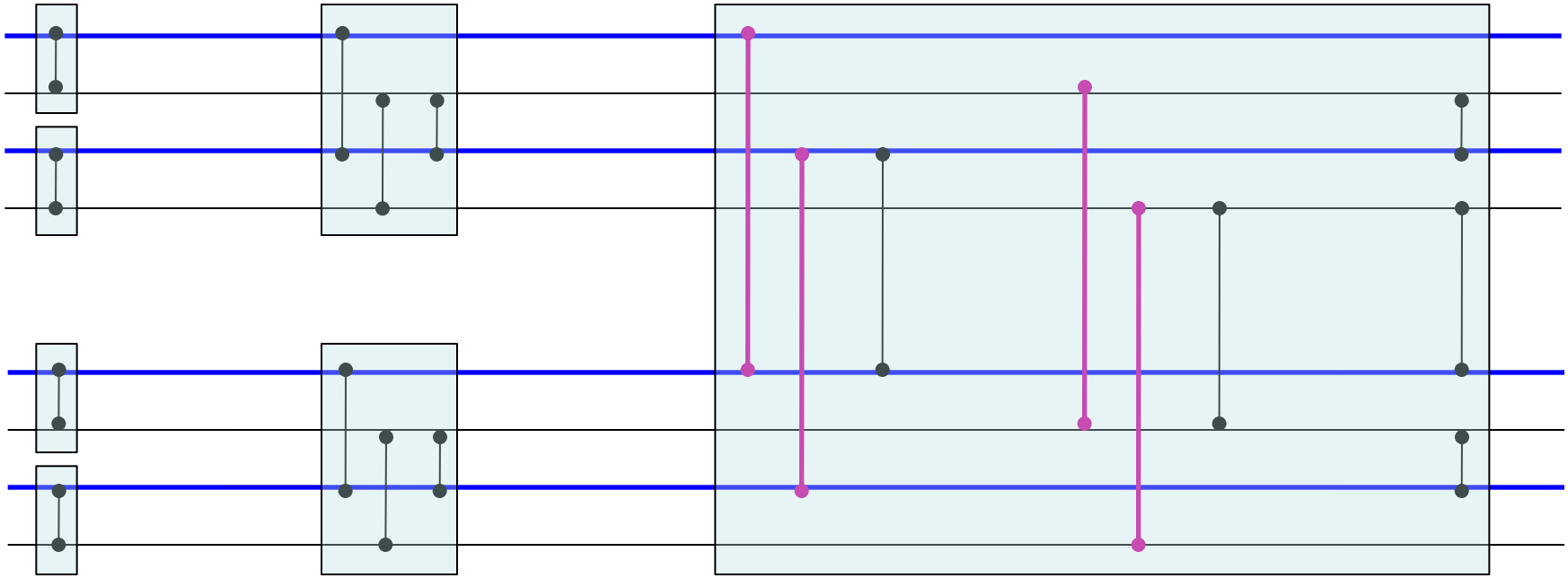
- *сеть четно-нечетного слияния Бетчера*

Сортировка восьми элементов

$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2 \frac{n}{p} + \frac{\lceil \log_2 p \rceil^2}{2}\right]\right)$$

или

n=8k элементов восемью процессорами

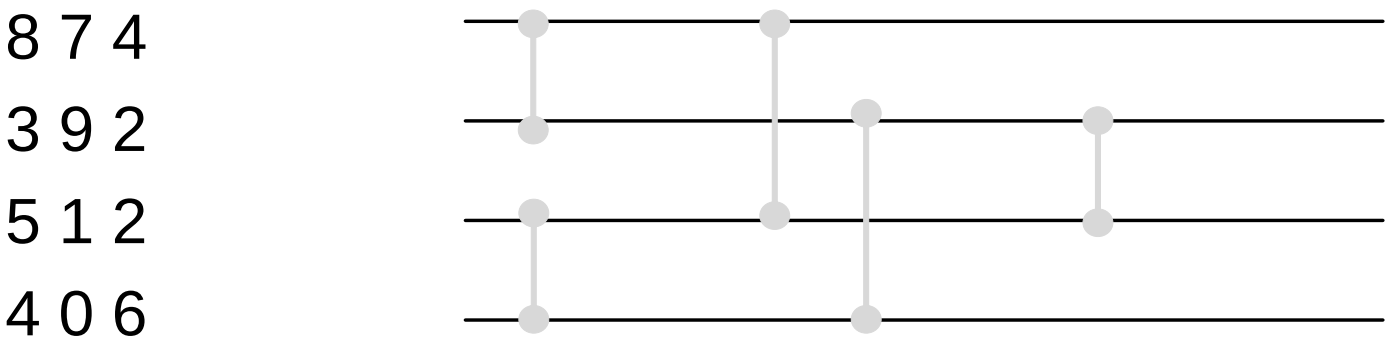


- *сеть четно-нечетного слияния Бетчера*

Пример работы алгоритма сортировки 12ти элементов на 4х процессорах

Начало, массив распределен по процессорам

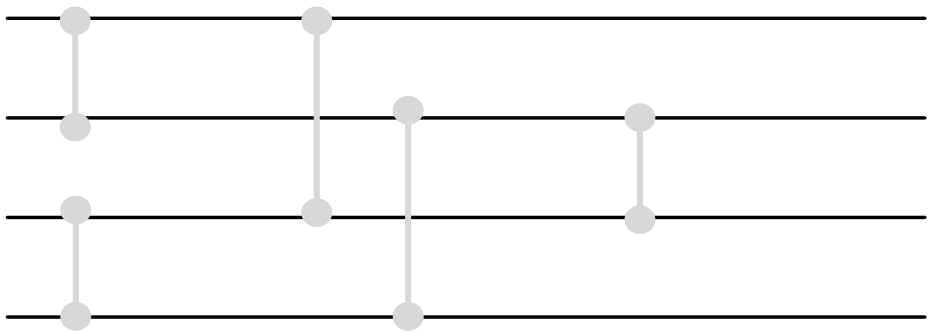
8 7 4 3 9 2 5 1 2 4 0 6



Сортируем фрагменты

8 7 4 3 9 2 5 1 2 4 0 6

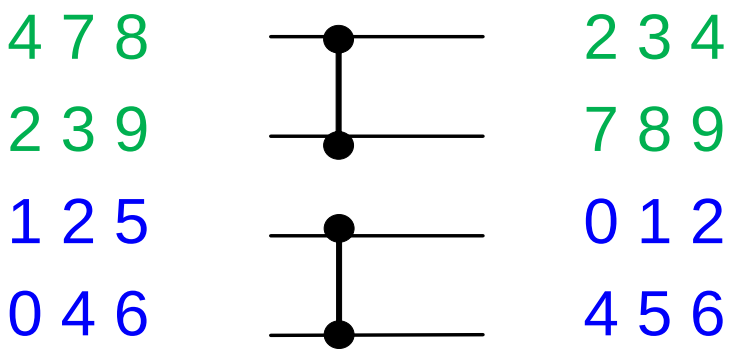
4 7 8
2 3 9
1 2 5
0 4 6



4 7 8 2 3 9 1 2 5 0 4 6

Первые два компаратора слияния перестановки

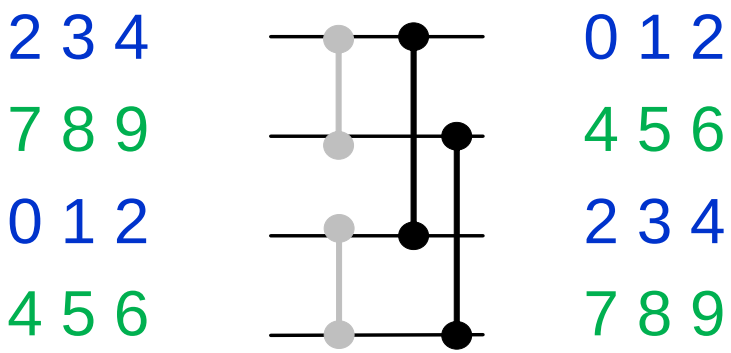
4 7 8 2 3 9 1 2 5 0 4 6



2 3 4 7 8 9 0 1 2 4 5 6

Вторая пара компараторов слияния перестановки

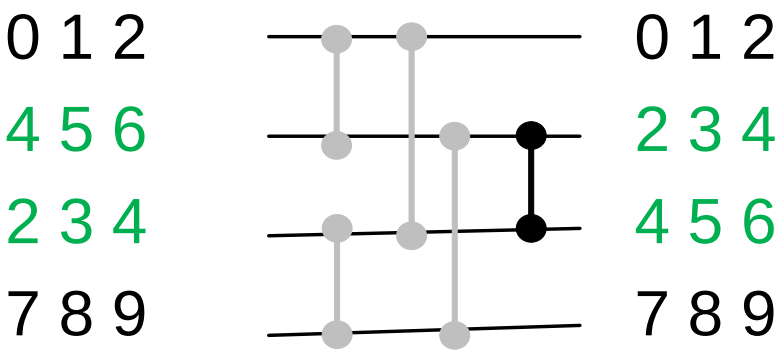
2 3 4 7 8 9 0 1 2 4 5 6



0 1 2 4 5 6 2 3 4 7 8 9

Последний компаратор слияния перестановки

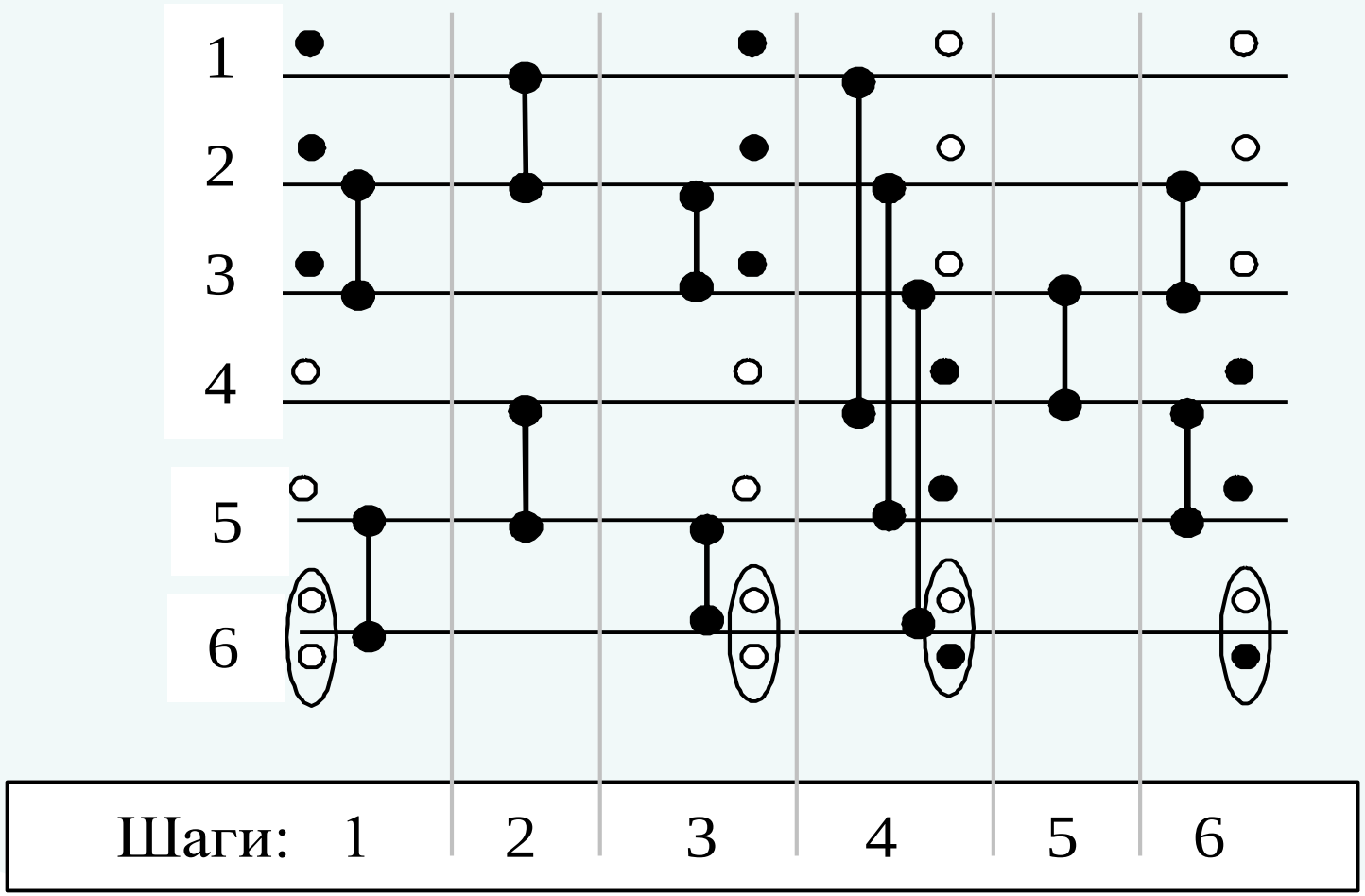
0 1 2 4 5 6 2 3 4 7 8 9



0 1 2 2 3 4 4 5 6 7 8 9

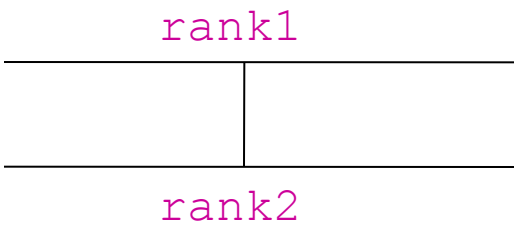
Массив упорядочен

Ограничение метода:
Сортировка блоков – ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА



Слияние упорядоченных фрагментов

```
Join(int *a, int *b, int *c, int n,rank1,rank2)
{
if(rank==rank1)
       for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;)
              {
              if(a[ia]<b[ib])      c[k++]=a[ia++];
              else                 c[k++]=b[ib++];
              }
else
       for(ia=n-1,ib=n-1,k=n-1;k>=0;)
              {
              if(a[ia]>b[ib])      c[k--]=a[ia--];
              else                 c[k--]=b[ib--];
              }
}
```



Реализация компаратора слияния

```
// взаимодействие процессоров rank и rankC
int *a,*b,*c,*tmp;
ASend(a,n,rankC);
ARecv(b,n,rankC);
ASync();

Join(a,b,c,n, rank, rankC);

tmp=a;
a=c;
c=tmp;
```

n=10^8

$$E^{\max}(n,p)=\frac{\log_2 n}{\log_2 n+s_p-\log_2 p}\approx\frac{1}{1+\log_n p(\log_2 p-1)/2}$$

P	T,сек	E	S	E^{max}	S^{max}	s_p
1	83.51	100.00%	1.00	100%	1.0	0
2	46.40	90.00%	1.80	100%	2.0	1
3	35.93	77.48%	2.32	95%	2.8	3
4	29.68	70.35%	2.81	96%	3.9	3
5	24.45	68.33%	3.42	91%	4.5	5
6	22.16	62.80%	3.77	92%	5.5	5
7	21.82	54.67%	3.83	89%	6.2	6
8	19.95	52.32%	4.19	90%	7.2	6
16	12.36	42.22%	6.75	82%	13.1	10
27	9.32	33.20%	8.97	74%	20.0	14
32	7.85	33.24%	10.64	73%	23.3	15
48	6.45	26.97%	12.95	66%	31.9	19
64	4.92	26.53%	16.98	64%	40.9	21
128	3.19	20.47%	26.20	56%	71.5	28
192	2.52	17.29%	33.19	51%	98.2	33
256	1.99	16.41%	42.02	49%	124.6	36
384	1.63	13.33%	51.20	49%	187.0	41
512	1.29	12.64%	64.74	42%	217.4	45
640	1.21	10.78%	69.02	41%	264.7	47

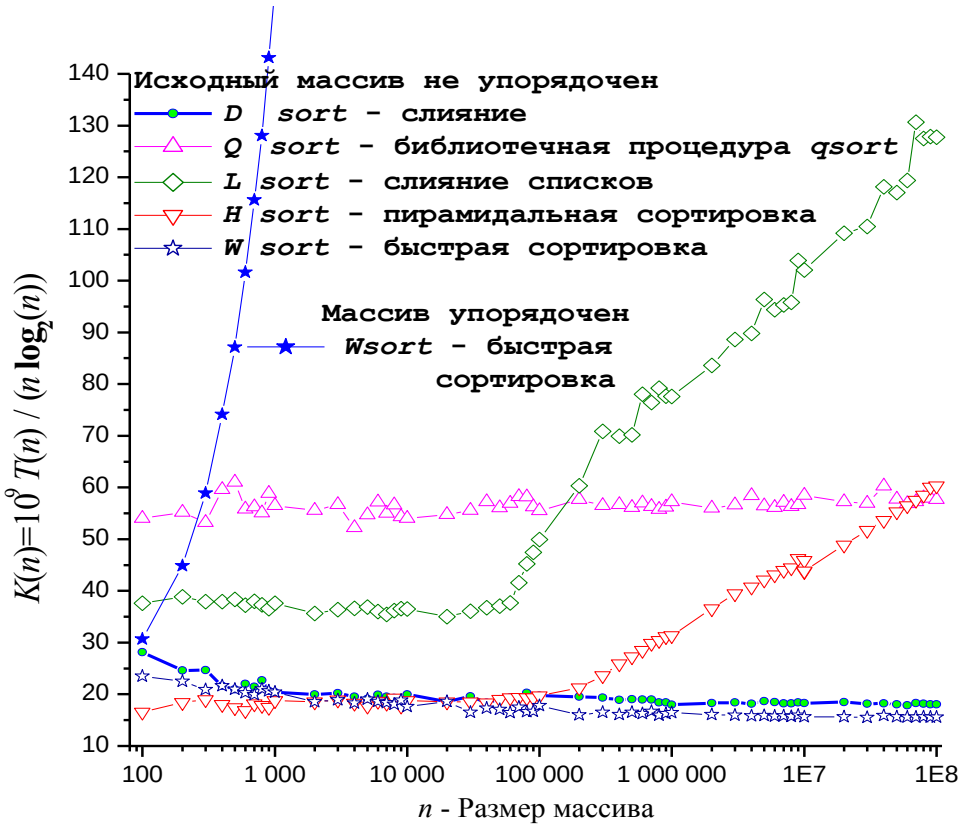
$$s_p\approx\frac{\lceil\log_2 p\rceil\left(\lceil\log_2 p\rceil+1\right)}{2}$$

Заключение

- Рассмотрен ряд методов сортировки массивов
- Проиллюстрирована разница между зависимостью от объема данных времени сортировки и числа выполняемых операций
- Построен «наилучший» последовательный алгоритм сортировки
- Рассмотрены сети сортировки
- Построен параллельный масштабируемый алгоритм сортировки

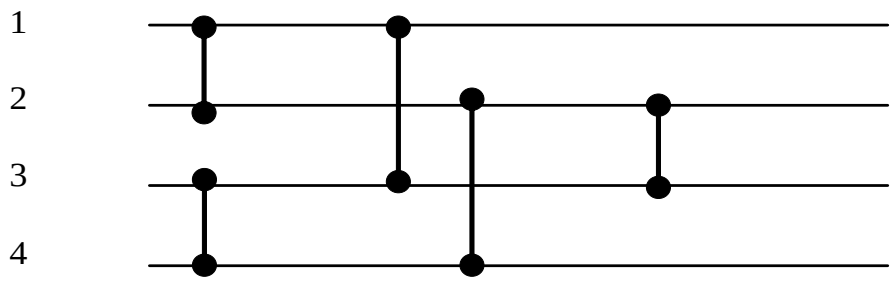
Вопросы для обсуждения

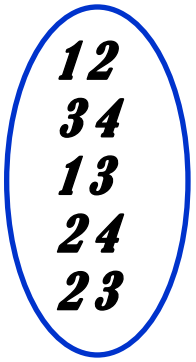
- В чем причина различия характера зависимости времени сортировки и числа выполняемых операций от числа элементов сортируемого массива?



Вопросы для обсуждения

- Правильно ли работают сети сортировки, если на разных процессорах расположено разное число элементов массива?
- Как сортировать массив, число элементов которого не кратно числу процессоров?
- Напишите программу построения расписания сети сортировки Бетчера





- Определить число тактов
- Проверить правильность сети при малых n

Контакты

Якобовский М.В.

чл.-кор. РАН, проф., д.ф.-м.н.,

зав. сектором

«Программного обеспечения многопроцессорных систем и вычислительных сетей»

Института прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук

mail: lira@imamod.ru

web: http://lira.imamod.ru