Лекция 5: Волны в магнитоактивной плазме

Кочаровский Вл.В.

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

4-ая Школа современной астрофизики, Пущино, 7-18 июля 2008г.

Квазиодномерное распределение частиц

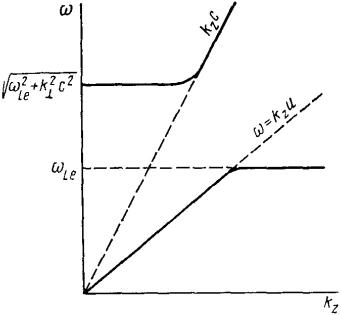
Одномерное распределение частиц, устанавливающееся в результате магнитотормозного излучения:

$$f(\mathbf{p}, t \to \infty) = \frac{N}{m_e c} \left(1 + \frac{p_{||}^2}{m_e^2 c^2}\right)^{-3/2} \frac{\delta(p_\perp)}{2\pi p_\perp}.$$

Продольные плазменные волны с $\mathbf{k} || \mathbf{B}_0$ описываются следующим дисперсионным уравнением

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{4} \left(\frac{ck}{\tilde{\omega_L}} + \frac{\tilde{\omega_L}}{ck}\right)^2 > c, \quad \tilde{\omega_L}^2 = \frac{3\pi}{4} \omega_L^2.$$

Взаимодействие пучка с медленной волной в плазме с сильным магнитным полем



Дисперсионное уравнение:

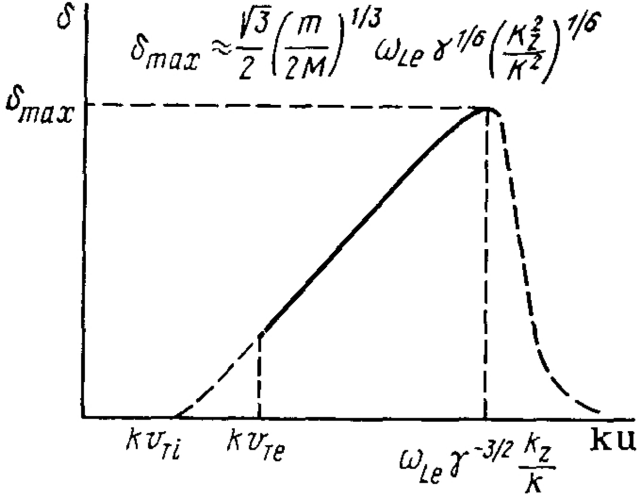
$$k_\perp^2 + \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2}\right) = 0.$$

Неустойчива медленная волна, искаженная пучком, при $\omega_L^2 - k_\perp^2 u^2 \gamma^2 > 0$:

$$\omega \approx k_z u + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{k_z u}{\gamma} \left(\frac{N_b}{2N_p}\right)^{1/3} \left[1 + \frac{k_\perp^2 u^2}{\omega_L^2} \gamma^2 (\gamma^2 - 1)\right]^{-1/3}$$

Ослабление бунемановской неустойчивости $\omega_L^2 \geq k^2 u^2 \gamma^3$ сильным продольным магнитным полем $(\mathbf{B}_0 || \mathbf{u})$.



Вейбелевская неустойчивость в магнитоактивной плазме с функцией распределения “waterbag”

$$F(p_\perp, p_z) = H(p_0 - p)H(p_{z0} - \|p_z\|)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

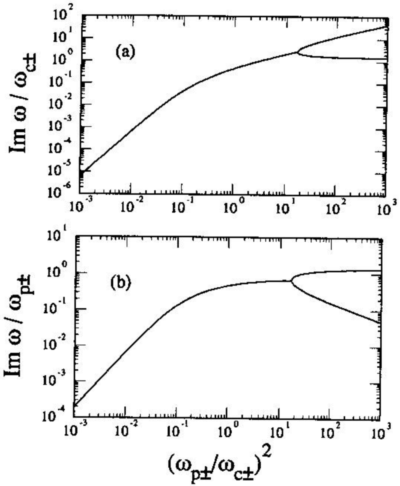


FIG. 5. The short-wavelength-limit ($ck/\omega_{c\pm} \gg 1$) growth rate versus the normalized plasma frequency-squared $(\omega_{p\pm}/\omega_{c\pm})^2$ for the waterbag distribution function with zero parallel temperature and $\gamma_0 = 100$. The growth rates are measured in units of (a) the relativistic cyclotron frequency $\omega_{c\pm}$ and (b) the relativistic plasma frequency $\omega_{p\pm}$.

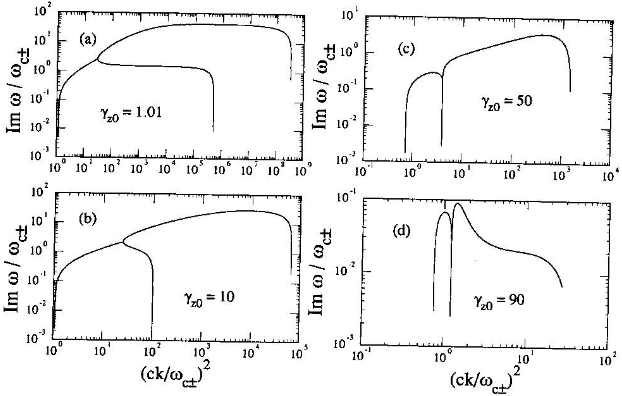


FIG. 6. The normalized growth rates Im $\omega/\omega_{c\pm}$ versus normalized wave numbers-squared $(ck/\omega_{c\pm})^2$ for the waterbag distribution function with $(\omega_{p\pm}/\omega_{c\pm})^2=10^3$, $\gamma_0=100$, and four different values of γ_z^0, i.e., (a) $\gamma_z^0=1.01$, (b) $\gamma_z^0=10$, (c) $\gamma_z^0=50$, and (d) $\gamma_z^0=90$.

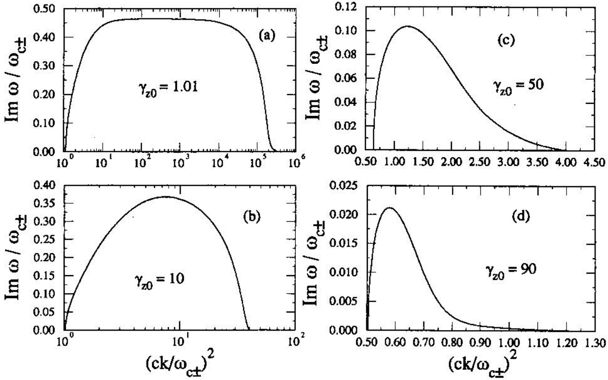
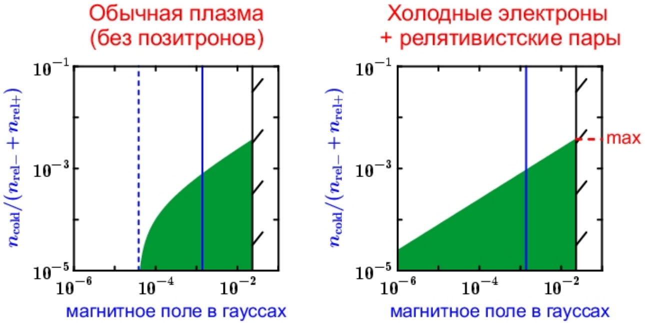


FIG. 7. The normalized growth rates $\mathrm{Im}\,\omega/\omega_{c\pm}$ versus normalized wave numbers-squared $(ck/\omega_{c\pm})^2$ for the waterbag distribution function with $(\omega_{p\pm}/\omega_{c\pm})^2=1$, $\gamma_0=100$, and four different values of γ_z^0, i.e., (a) $\gamma_z^0=1.01$, (b) $\gamma_z^0=10$, (c) $\gamma_z^0=50$, and (d) $\gamma_z^0=90$.

Поляризация излучения джетов активных ядер галактик

Интерферометрические радионаблюдения показывают, что в основании джет представляет собой последовательность отдельных ярких компонент, и позволяют вычислить их параметры - яркостную температуру и угол поворота плоскости поляризации излучения. За угол поворота принимают разность углов между плоскостями поляризации при переходе от данной частоты к более высоким частотам, где эффект Фарадея заведомо мал. Характерные значения угла поворота - порядка градуса, а яркостной температуры - порядка 1010 K.

Идея определения состава плазмы основана на том, что интенсивность излучения источника в джете зависит от суммы концентраций релятивистских электронов и позитронов, но не от концентрации холодной фракции. Угол поворота, напротив, задается разностью концентраций релятивистских электронов и позитронов (частицы с разными знаками заряда вращают плоскость поляризации в разные стороны) и весьма чувствителен к концентрации нерелятивистских электронов.



Диаграммы построены для двух предельных случаев: присутствуют только холодная фракция и релятивистские электроны (но без позитронов) или холодная фракция сочетается с релятивистскими электрон-позитронными парами.

Перенос поляризованного излучения в магнитоактивной плазме

Электромагнитная волна частоты ω удовлетворяет волновому уравнению:

$$\nabla \times (\hat{\mu}^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \mathbf{E}.$$

Используем предположения:

- Слабая анизотропия — пренебрегаем отклонением траектории лучей от прямолинейной.
- Волна распространяется вдоль оси **Z**.
- Внешнее магнитное поле постоянно.
- Считаем, что $\hat{\mu}^{-1}$ диагонален и не зависит от z.
- Среда плавно неоднородна, т.е. масштаб изменения концентрации H_ρ много больше длины волны: $H_\rho \omega / c \gg 1$.

Волновое уравнение. Попутные волны

Пусть $\mathbf{E} = e^{ik_0 z}\mathbf{A}$. Полагая выполненным приближение медленно меняющейся амплитуды $|d\mathbf{A}/dz| \ll k_0|\mathbf{A}|$, где $k_0 \equiv \omega/c$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dA_x}{dz} &= \frac{ik_0}{2\mu_{11}^{-1}}\left[(\epsilon_{11} - \mu_{11}^{-1})A_x + \epsilon_{12}A_y + \epsilon_{13}A_z\right], \\
\frac{dA_y}{dz} &= \frac{ik_0}{2\mu_{22}^{-1}}\left[\epsilon_{21}A_x + (\epsilon_{22} - \mu_{22}^{-1})A_y + \epsilon_{23}A_z\right], \\
A_z &= -\frac{\epsilon_{13}A_x + \epsilon_{23}A_y}{\epsilon_{33}}.
\end{aligned}$$

Будем рассматривать поперечные волны. Перепишем систему

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = -ik_0 \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

Волновое уравнение. Общий случай

Монохроматические волны в неоднородной среде описываются в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\mathbf{e}' = -iT\mathbf{e}.$$

Здесь через $\mathbf{e}$ обозначен N-компонентный вектор-столбец комплексных полевых переменных $A_\alpha(\alpha = \overline{1, N})$; квадратная матрица $T = T(\zeta)$ определяется локальными свойствами среды. Штрих обозначает дифференцирование по безразмерной пространственной переменной $\zeta = k_0 z$.

Определим для матрицы T в каждой точке среды полную систему собственных векторов $\mathbf{e}_i$ — нормальные волны, для которых $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^* = 1$, и их собственные значения - показатели преломления n_i с помощью уравнения

$$T\mathbf{e}_i = n_i\mathbf{e}_i.$$

Линейное взаимодействие волн

Воспользуемся канонической заменой

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{N} f_i \vec{\mathcal{E}}_i, \quad \vec{\mathcal{E}}_i = \Phi_i \mathbf{e}_i,$$

и перейдем к уравнениям для комплексных амплитуд взаимодействующих волн

$$f_i' + i n_i f_i = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} f_j, \quad a_{ij} = -\vec{\mathcal{E}}_j' \cdot \vec{\mathcal{E}}^{i*}.$$

При переходе использована взаимная (к $\vec{\mathcal{E}}$) система векторов $\vec{\mathcal{E}}^{i*}$, $\vec{\mathcal{E}}_j \cdot \vec{\mathcal{E}}^{i*} = \delta_{ij}$. Множители Φ_i определяются из условия $a_{ii} \equiv -\vec{\mathcal{E}}_i' \cdot \vec{\mathcal{E}}^{i*} = 0$.

Уравнения переноса

Пусть коэффициенты связи действительны и $a_{12} = -a_{21} = -\Psi$. Величина $\Psi = -(dq/dl)/(2(q^2+1))$ таким образом описывает эффективность взаимодействия. Тогда, для квадратичных комбинаций комплексных амплитуд (f_1, f_2) нормальных волн $J_{ij} = f_i f_j^*$ можно получить следующие уравнения переноса:

$$\begin{aligned}
J_{11}' &= -2J_{11}(\mathrm{Im}\, n_1) - \Psi(J_{12} + J_{21}), \\
J_{22}' &= -2J_{22}(\mathrm{Im}\, n_2) + \Psi(J_{12} + J_{21}), \\
J_{12}' &= -iJ_{12}(n_2^* - n_1) + \Psi(J_{11} - J_{22}).
\end{aligned} \tag{1}$$

Пренебрегая Ψ, можем получить геометрооптические уравнения переноса нормальных волн:

$$\begin{aligned}
J_1' &= -2J_1(\mathrm{Im}\, n_1), \\
J_2' &= -2J_2(\mathrm{Im}\, n_2).
\end{aligned}$$

Функция источников

Уравнения полученные выше не содержат источников излучения. Уравнения переноса в общем случае имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{J}}{ds} = -\hat{M}\mathbf{J} + \mathbf{S}_{sc} + \mathbf{S}_{em}.$$

Здесь $\mathbf{S}_{sc}$ описывает перерассеянное в выбранное направление излучение:

$$\mathbf{S}_{sc} = \int \hat{R}(\Omega', \omega' \to \Omega, \omega)\mathbf{J}(\Omega', \omega')d\Omega' d\omega'.$$

$\mathbf{S}_{em}$ описывает собственное излучение среды

$$\mathbf{S}_{em} = \frac{k_o B_\omega}{2}(\mu_1, \mu_2, i(n_2^* - n_1))^+.$$

Граничные условия для полубесконечной атмосферы

- Нет излучения, падающего извне

$$J_i(\cos\theta < 0, \tau = 0) = 0.$$

- Термализация излучения в глубине атмосферы:

$$J_i(\cos\theta > 0, \tau \to \infty) \to \frac{B_\omega}{2} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} \frac{1}{\exp\left(\hbar\omega/(kT)\right) - 1}.$$

Перенос излучения в магнитоактивной плазме

Уравнение переноса излучения в линии электронного гирорезонанса

$$\cos\theta \frac{dI(\beta,\theta)}{dz} = -\mu_c \left[I(\beta,\theta) - S \right], \; \mu_c = \frac{1+\cos^2\theta}{|\cos\theta|} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_L^2 \omega_B}{\omega^2 \beta_T c} \exp\left\{ -\frac{\beta^2}{\beta_{T_{||}}^2} \right\}$$

$$S = \frac{1}{1+\epsilon} \int_0^\pi \frac{3}{8}(1+\cos^2\theta') I(\theta') \sin\theta' d\theta' + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \frac{B_\omega}{2}.$$

Здесь $\epsilon = \nu_{eff}/\gamma \propto N$ - отношение времени спонтанного циклотронного перехода электрона к времени между столкновениями,
$\beta = (\omega - \omega_B)/(\omega \cos\theta), \quad \beta_{T_{||}} = \sqrt{kT_{||}/mc^2},$
$N = N_0 \exp(-z/H), \quad H = 2kT/(m_p g)$ - приведенная высота атмосферы. Сила давления излучения:

$$f_{rad} = \frac{\pi}{N} \frac{\omega_B}{mc^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-1}^{1} \mu_c(\beta,\theta) I(\beta,\theta) |\cos\theta| \cos\theta d\cos\theta.$$

Перенос излучения в магнитоактивной плазме

$$\epsilon = \epsilon_0 \tau_{sc}, \quad \epsilon_0 \ll 1,$$

Рассеяние: $\mu_{sc} = C \cdot N,$

$$\tau_{sc} = -C \int_z^\infty N_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz = CHN,$$

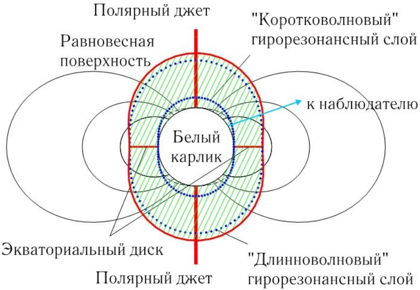
Поглощение: $\mu_{ab} = \epsilon \mu_{sc},$

$$\tau_{ab} = C\epsilon_0 \int N^2 dl \propto \epsilon_0 \tau_{sc}^3.$$

Оценочное решение уравнений переноса для рассеивающих атмосфер:

$$I \approx \frac{B_\omega}{2} \frac{1}{1 + \frac{A}{\sqrt[3]{\epsilon_0}}}, \quad A \approx 1.$$

Радиационное давление в атмосферах компактных звезд



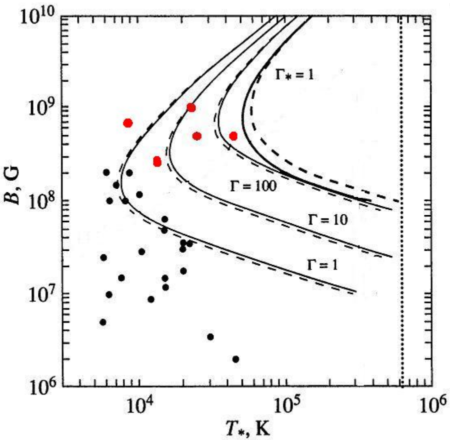
Модель радиационного дискона.

- Горячий магнитный белый карлик $B \sim 10^7 - 10^9$Гс
- Фотосфера из которой вытекает ветер, порождаемый циклотронным излучением
- Протяженная плазменная оболочка
- Полярные джеты, ускоряемые давлением циклотронного излучения вдоль магнитной оси

Наблюдательные проявления

- Широкая и глубокая полоса депрессии
- Биполярное истечение вещества

Критическая температура белых карликов

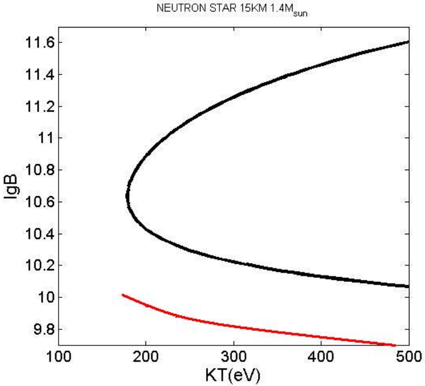


Сила давления циклотронного излучения на магнитных белых карликах

- Фотосфера водородного магнитного белого карлика.
- $g = 10^8$см/с, $R = 10^9$см.
- Кандидаты: RE J0317-853, GD 229, PG1031+234, GrW+708247, SBC 1349+5434, LB 11176.
- Сплошные линии для $\theta = 0$, штриховые для $\theta = \pi/2$.

Точками показаны параметры известных магнитных белых карликов. Тонкими кривыми показаны линии уровня 1, 10 и 100 отношения $\Gamma = f_{rad}(\tau = 0)/f_g$ для случая, когда интенсивность выходящего излучения равна чернотельной.

Критическая температура нейтронных звезд



Сила давления циклотронного излучения на магнитных нейтронных звездах

- Водородная атмосфера нейтронной звезды.
- $M = 1.4M_{\odot}$, $R = 1.5 \cdot 10^6$см.
- Учет поляризации вакуума и релятивистских поправок к условию циклотронного резонанса.

Справа от черной кривой располагается область неустойчивости статической атмосферы, вызванной давлением циклотронного излучения. Снизу от красной кривой - область, где влиянием ухода излучения из линии можно пренебречь.

Намагничение вакуума. Основные уравнения

Тензор диэлектрической и обратной магнитной проницаемостей:

$$\epsilon_{ik}^{(vac)} = \delta_{ik}(1-2a) + 7a\frac{B_i B_k}{B^2},$$
$$\mu_{ik}^{-1(vac)} = \delta_{ik}(1-2a) - 4a\frac{B_i B_k}{B^2},$$

при этом предполагается, что выполнено условие $a \ll 1$, где

$$a = \frac{1}{45\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{B}{B_{cr}}\right)^2, \qquad B_{cr} = m^2c^3/\hbar e \simeq 4.4\cdot 10^{13}\text{Гс}.$$

Волны в системе "плазма + намагниченный вакуум"

$$K = -i\frac{E_y}{E_x}, \quad K_{1,2} = q \pm \sqrt{q^2+1},$$

$$\frac{dK}{dz} = i\frac{n_2 - n_1}{K_2 - K_1}(K - K_1)(K - K_2),$$

$$n_{1,2} = 1 + \frac{11}{2}a\sin^2\theta - \frac{v(2 - u\sin^2\theta)}{2(1-u)} \pm \frac{v\sqrt{u}\cos\theta}{u-1}\sqrt{q^2+1}$$

$$u = \frac{\omega_B^2}{\omega^2}, \quad v = \frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \quad \omega_B = \frac{eB}{mc}, \quad \omega_L = \sqrt{\frac{4\pi e^2 m}{N}}.$$

$$q = \frac{\sqrt{u}\sin^2\theta}{2\cos\theta}\left[1 - \frac{3a(u-1)}{vu}\right],$$

Трансформация мод в системе "плазма + намагниченный вакуум"

$$q = \frac{\sqrt{u}\sin^2\theta}{2\cos\theta}\left[1 - \frac{3a(u-1)}{vu}\right],$$

$$\Lambda_q = |q^{-1}dq/dz|^{-1}_{q^2=1}.$$

$$\left|1 - \frac{1}{3}\frac{vu}{a}(u-1)\right| \ll 1,$$

$$G_v^{\perp} = 12\sqrt{2}k_0 a u^{-1}\mathrm{ctg}^2\theta \left|\frac{v}{dv/dl}\right|_{q^2\sim 1}, \quad u<1, \quad v \ll 1,$$

$$Q^{\perp} = \exp\left(-\pi G_v^{\perp}/(4\sqrt{2})\right), \quad \text{при} \quad dv/dl = const,$$

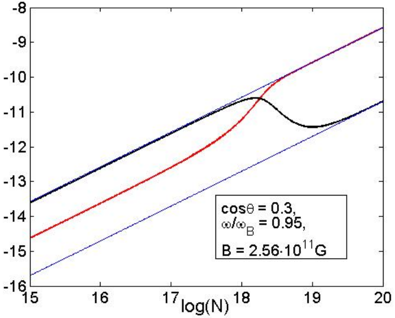
$$G_v^{\perp} \lesssim 1 \quad \Rightarrow \quad \hbar\omega_B \lesssim 1\text{кэВ}, \quad N_0 \sim 10^{20}\text{см}^{-3}.$$

Намагничение вакуума. Простейшие следствия

- Двулучепреломление в "чистом вакууме"

$$n_{1,2} = 1 + \frac{a}{4}\sin^2\theta(11 \pm 3).$$

- Изменение поляризации, показателей преломления и поглощения нормальных волн в магнитоактивной плазме.



Условие гирорезонанса. Общие уравнения

Пусть продольный импульс электрона до взаимодействия с фотоном равен P. Условие резонансного поглощения фотона, связывающее его частоту и угол распространения с продольным импульсом электрона:

$$\frac{\hbar\omega}{mc^2}+\sqrt{1+\left(\frac{P}{mc}\right)^2+\left(\frac{2\hbar\omega_B}{mc^2}\right)l}=\sqrt{1+\left(\frac{Pc+\hbar\omega\cos\theta}{mc^2}\right)^2+\left(\frac{2\hbar\omega_B}{mc^2}\right)(l+1)}. \tag{2}$$

Здесь l - номер уровня Ландау, на котором находился электрон до поглощения фотона.

Условие гирорезонанса. Нерелятивистский случай

$$\omega(1 - \beta \cos\theta) = \omega_B$$

- Фотоны всегда взаимодействуют с одной и той же резонансной группой электронов.

Условие гирорезонанса. Слаборелятивистское приближение

$$\omega(1 - \beta\cos\theta + \frac{\beta^2}{2}) = \omega_B(1 - \kappa(\sin^2\theta - 2l)). \qquad (3)$$

Это условие при $l = 0$ дает, вообще говоря, два значения скорости электронов, которые резонансным образом взаимодействуют с фотоном заданной частоты и угла распространения. В слаборелятивистском приближении эти скорости находятся как корни уравнения (3):

$$\beta_1 = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 2\left(1 - \frac{\omega_B}{\omega}(1 - \kappa\sin^2\theta)\right)}, \qquad (4)$$

$$\beta_2 = \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 2\left(1 - \frac{\omega_B}{\omega}(1 - \kappa\sin^2\theta)\right)}. \qquad (5)$$

"Перескоки"

Взаимодействие с двумя группами электронов может приводить к весьма эффективному выходу фотонов из циклотронной линии. Для демонстрации этого факта рассмотрим рассеяние фотона с частотой и углом распространения ω, θ на электроне, движущемся со скоростью β_2, где $|\beta_2| > |\beta_1|$. В результате рассеяния фотон приобретает частоту ω' и угол распространения θ' и попадает в резонанс с электронами, имеющими не только скорость

$$\beta_2' = \beta_2 + 2\kappa(\cos\theta - \cos\theta'),$$

мало отличающуюся от первоначальной, но и другую скорость, которая может быть сильно смещена:

$$\beta_1' = 2\cos\theta' - \beta_2.$$

В итоге, фотон, рассеянный, скажем, в направлении почти поперек магнитного поля, где линия наиболее узкая, может резонансно провзаимодействовать с более быстрым электроном и уйти из линии.

Тензор диэлектрической проницаемости

В декартовой системе координат с осью Z вдоль магнитного поля и волновым вектором, лежащим в плоскости YZ:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \epsilon_{yy} = 1 + i(b_- + b_+), \qquad \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = b_- - b_+, \\
\epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\gamma)}, \qquad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{yz} = 0;
\end{aligned}$$

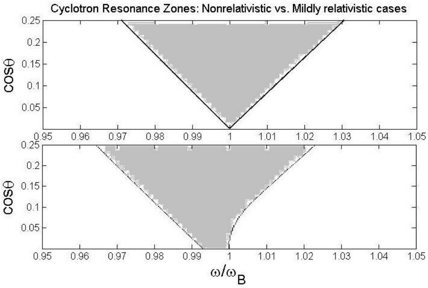
$$b_+ = \frac{i\omega_L^2}{2\omega^2(1 + \omega_B/(\omega + i\gamma))},$$

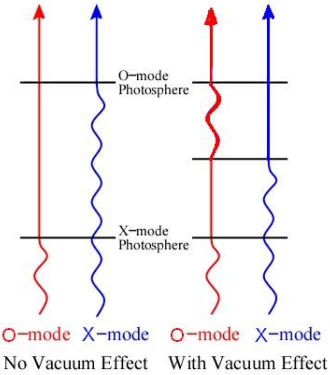
$$b_- = \frac{\sqrt{\pi}\omega_L^2}{4\omega^2\beta_T^2} \cdot \frac{\varpi(\xi_1) - \varpi(\xi_2)}{\xi_2 - \xi_1},$$

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}\beta_T}\left(\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 2\left(1 - \frac{\omega_B}{\omega}\left(1 - \kappa\sin^2\theta - i\frac{\gamma}{\omega_B}\right)\right)}\right),$$

$$\kappa = \frac{\hbar\omega}{2mc^2}, \qquad \varpi(Z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{Z - y}dy \quad \text{— функция Крампа.}$$

Качественные эффекты учета влияния намагничения вакуума и релятивистских эффектов





- Изменение поляризации нормальных волн за счет намагничения вакуума может приводить к значительному увеличению силы давления излучения в атмосферах компактных звезд.
- Выход излучения из резонанса за счет релятивистских эффектов приводит к уменьшению силы давления излучения за счет уменьшения потока в центре линии.