

# Лекция 4: Токовые слои и филаменты в релятивистской плазме

Кочаровский Вл.В.

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

4-ая Школа современной астрофизики, Пущино, 7-18 июля 2008г.

# Самосогласованные токовые структуры

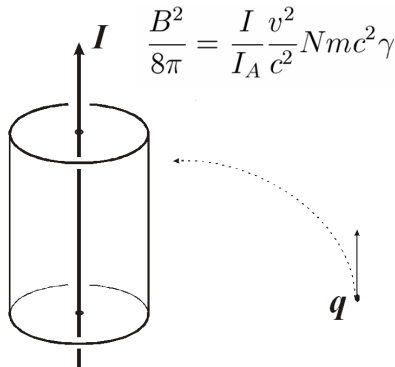


$$I_A = \frac{mc^3 v}{e c} \gamma$$

$$\frac{r}{r_H} = \frac{2I}{I_A}$$

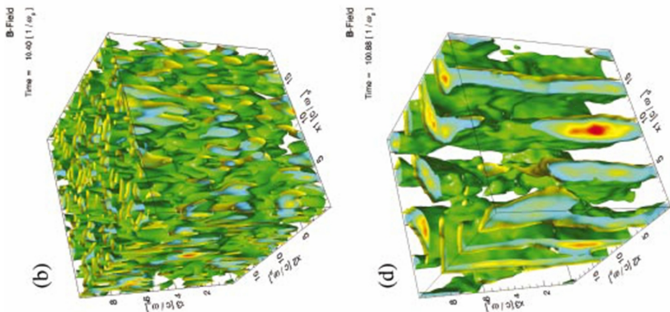
$$I \sim I_A \cdot \frac{D}{r_{H\min}}$$

$$\frac{B^2}{8\pi} < Nmc^2 \gamma$$





## 3D вейбелевская неустойчивость в $e^-e^+$ плазме



Плотность магнитной энергии на уровне 15% максимума.

Показаны результаты перед насыщением и на квазистатической стадии ( $\varepsilon_B \sim 1\%$ ).

Fonseca, Silva et al (2003).

# Нерелятивистский слой Харриса



$$f_{e,i} = \frac{N(x, z)}{(2\pi m_{e,i} T_{e,i})^{3/2}} \exp\left(\frac{-p_x^2 - (p_y - m_{e,i} V_{e,i})^2 - p_z^2}{2m_{e,i} T_{e,i}}\right)$$

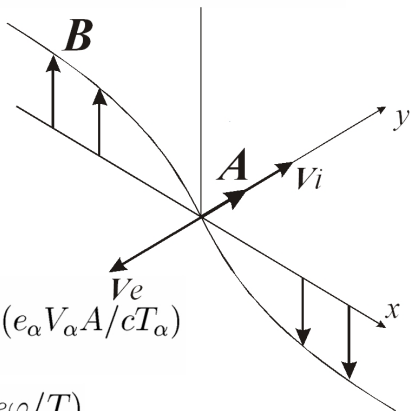
$$V_e, V_i = \text{const}$$

$$V_e/T_e = V_i/T_i$$

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} V_{\alpha} \exp(e_{\alpha} V_{\alpha} A / c T_{\alpha})$$

$$\Delta \varphi = 4\pi \rho, \quad \rho \sim \exp(-e\varphi/T)$$

$$e_{\alpha} E_{\alpha} = T_{\alpha} \nabla N_{\alpha}$$



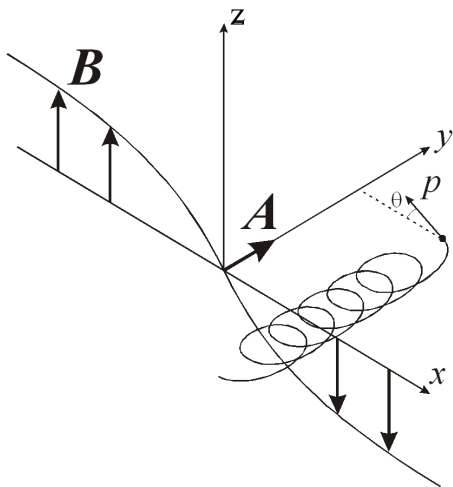


$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$$

$$P_y = p_y + \frac{e}{c} A_y$$

$$p_z$$

$$f = f(\mathcal{E}, P_y, p_z)$$



$$\mathbf{A} = A_y \mathbf{y}_0(x)$$

# Токовые слои и филаменты в релятивистской плазме

Кинетическое уравнение в стационарном бесстолкновительном случае:

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Уравнения Максвелла в стационарном случае:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}],$$

$$\Delta\varphi = -4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha d^3\mathbf{p},$$

$$[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha \frac{\mathbf{p}}{m_\alpha \gamma_a} d^3\mathbf{p}$$

Будем искать решение, однородное по  $z$ , поле  $\mathbf{B}$  лежит в плоскости  $x, y$ , электрическое поле отсутствует. Тогда  $\varphi \equiv 0$ ,  $A_x = A_y = 0$ . Если представить функцию распределения в виде функции от интегралов движения частиц ( $A = A_z$ )

$$f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = F_\alpha(p, p_z + e_\alpha A/c),$$

то она будет тождественно удовлетворять кинетическому уравнению

$$\mathbf{p} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{p} \times \mathbf{B}] \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

Остается одно уравнение на  $A$

$$-\Delta_{xy} A = \frac{4\pi}{c} \sum_j e_\alpha \int F_\alpha(p, p_z + e_\alpha A/c) \frac{p_z}{m_\alpha \gamma_\alpha} d^3 \mathbf{p},$$

где  $\Delta_{xy} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ . Правая часть есть некоторая функция от  $A$ , которую удобно записать в виде  $dU(A)/dA$

$$\Delta_{xy} A = -\frac{dU}{dA}$$

В частных случаях плоско-слоистых и цилиндрически-симметричных конфигураций последнее уравнение становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -\frac{dU}{dA}, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = -\frac{dU}{dA}$$

Если представить функцию распределения в факторизованном виде, где один из множителей - многочлен степени  $d$  от проекции обобщенного импульса

$$F_\alpha(p, p_z + e_\alpha A/c) = \sum_{i=0}^d \hat{F}_{\alpha i}(p) (p_z + e_\alpha A/c)^i,$$

то соответствующий потенциал Грэда-Шафранова  $U$  также будет многочленом той же степени

$$U = \sum_{\alpha} \sum_{i=0}^d \int \frac{8\pi^2 \hat{F}_{\alpha i}(p)}{(m_\alpha c)^{i+1}} \frac{(e_\alpha A/c + p)^{i+2} [p(i+2) - e_\alpha A/c] + (e_\alpha A/c - p)^{i+2} [p(i+2) + e_\alpha A/c]}{(i+1)(i+2)(i+3)} \frac{c}{\gamma_\alpha} p dp,$$

коэффициенты которого определяются видом зависимостей  $\hat{F}_{\alpha i}(p)$ . Естественное ограничение при этом (помимо квазинейтральности) —  $F_\alpha(p, p_z + e_\alpha A/c) \geq 0$  во всем интервале  $A$ , участвующем в решении.



Еще одним вариантом, приводящим к простому аналитическому ответу, является представление функции распределения в виде

$$F_{\alpha}(p, p_z + e_{\alpha}A/c) = \hat{F}_{\alpha}(p) \exp\left(\frac{p_z + e_{\alpha}A/c}{p_0}\right),$$

где  $p_0 = \text{const}$ . Тогда для векторного потенциала имеем уравнение

$$\Delta_{xy} A = -\beta \exp\left(\frac{e_{\alpha}A}{p_0 c}\right),$$

в котором константа  $\beta$  определяется видом зависимости  $\hat{F}_{\alpha}(p)$

$$\alpha = \frac{8\pi^2 e_{\alpha} p_0^2}{m_{\alpha} c} \int \hat{F}_{\alpha}(p) \left[ \left(\frac{p}{p_0} - 1\right) \exp\left(\frac{p}{p_0}\right) + \left(\frac{p}{p_0} + 1\right) \exp\left(-\frac{p}{p_0}\right) \right] \frac{p}{\gamma_{\alpha}} dp,$$

причем для неотрицательности функции распределения достаточно потребовать неотрицательности  $\hat{F}_{\alpha}(p)$ .

Уравнение

$$\Delta_{xy} A = -\beta \exp\left(\frac{e_\alpha A}{p_0 c}\right),$$

имеет решение

$$A(x) = -2p_0 c e_\alpha^{-1} \ln \cosh \sqrt{\beta e_\alpha / 2p_0 c} x,$$

соответствующее слою Харриса, который в нерелятивистском частном случае получается из сдвинутых максвелловских распределений:

$$f_\alpha = \frac{N(x)}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(\frac{-p_x^2 - p_y^2 - (p_z - m_\alpha V_\alpha)^2}{2m_\alpha T_\alpha}\right),$$

$$V_e/T_e = V_i/T_i, \quad \frac{d^2 A}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha n_{0\alpha} V_\alpha \exp\left(\frac{e_\alpha V_\alpha A}{c T_\alpha}\right)$$

Для квадратичного представления функции распределения

$$F_{\alpha}(p, p_z + e_{\alpha}A/c) = \hat{F}_{\alpha 2}(p) (p_z + e_{\alpha}A/c)^2$$

решения являются гармоническими в пространстве и позволяют легко оценить возможное соотношение энергии поля и энергии частиц

$$\varepsilon_B = \frac{\langle W_B \rangle}{\langle W_{\alpha} \rangle} = \frac{B_{\max}^2/16\pi}{\sum_{\alpha} N_{\alpha} m_{\alpha} c^2 \langle f_{\alpha} \gamma_{\alpha} d^3 p \rangle} = \frac{\frac{A_{\max}^2}{3} \int \hat{F}_{\alpha 2}(p) \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} c^2} \frac{p^2}{m_{\alpha}^2 c^2 \gamma_a} p^2 dp}{A_{\max}^2 \int \hat{F}_{\alpha 2}(p) \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} c^2} \gamma_a p^2 dp + \frac{2}{3} \int \hat{F}_{\alpha 2}(p)(\mathcal{E}) \frac{p^2 \gamma_a}{m_{\alpha}} p^2 dp}$$

$$\varepsilon_B < \frac{\int \hat{F}_{\alpha 2}(p) \frac{e_{\alpha}^2 \gamma_a}{m_{\alpha} c^2} \frac{p^2}{m_{\alpha}^2 c^2 \gamma_a^2} p^2 dp}{3 \int \hat{F}_{\alpha 2}(p) \frac{e_{\alpha}^2 \gamma_a}{m_{\alpha} c^2} p^2 dp} < \frac{1}{3}$$

Если  $F_{\alpha 2}(p)$  локализована вблизи некоторого импульса, то есть энергии всех частиц близки, то

$$\varepsilon_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{p^2 c^2}{e_\alpha^2 A_{\max}^2}} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

Стационарные токовые структуры допускают масштабное преобразование (крышками отмечены “новые” величины)

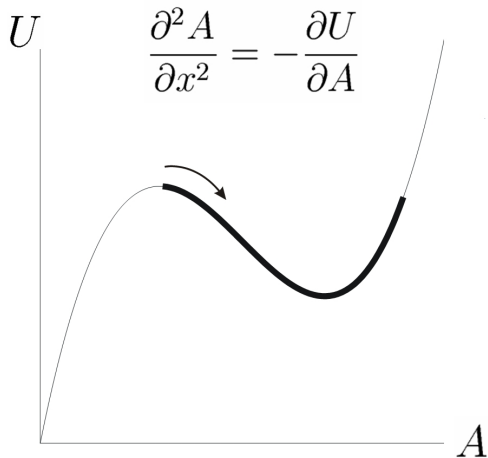
$$\hat{p} = \lambda p, \hat{N} = \beta N, \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \sqrt{\hat{\gamma}/\gamma\beta}$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}) = \lambda \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\hat{\gamma}}} B \left( \mathbf{r} \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\hat{\gamma}}} \right)$$

при условии  $\hat{\gamma}/\gamma = \text{const}$ . Последнее возможно в трех случаях:

- 1) нерелятивистский,  $\hat{\gamma} = \gamma = 1$ ;
- 2) ультрарелятивистский  $\hat{\gamma} = \lambda\gamma$ ;
- 3) моноэнергетический  $\gamma = \text{const}$ .

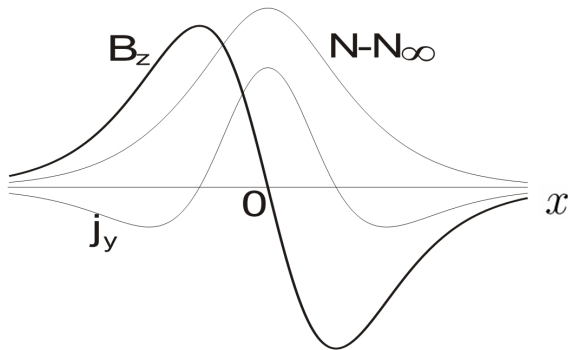
Соотношение магнитной энергии и энергии частиц во всех решениях, полученных масштабным преобразованием некоторого исходного решения, одинаково с точностью до двойки.





Пример решения для  $d=3$  (экранированный токковый слой)

$$A = \frac{-mc^2 N_2}{eN_3} \text{ch}^{-2} \left( \sqrt{-\frac{\pi e^2 N_2 p_0^2}{c\gamma_0 (mc)^3}} x \right)$$





Пример решения для  $d=3$  (экранированный токовый слой)

$$A = \frac{-mc^2 N_2}{eN_3} \operatorname{ch}^{-2} \left( \sqrt{-\frac{\pi e^2 N_2 p_0^2}{c\gamma_0 (mc)^3}} x \right)$$

$$B_z = \frac{2m_e c^2 N_2}{e_e N_3} \sqrt{-\frac{\pi e_e^2 N_2 p_0^2}{\gamma_0 m_e^3 c^4}} \operatorname{ch}^{-2} \left( \sqrt{-\frac{\pi e_e^2 N_2 p_0^2}{\gamma_0 m_e^3 c^4}} x \right) \tanh \left( \sqrt{-\frac{\pi e_e^2 N_2 p_0^2}{\gamma_0 m_e^3 c^4}} x \right),$$

$$N_e = N_0 + \frac{N_2 p_0^2}{2m_e^2 c^2} + \frac{N_2 e_e^2 A_y^2}{m_e^2 c^4} + \frac{3N_3 p_0^2 e_e A_y}{4m_e^3 c^4} + \frac{N_3 e_e^3 A_y^3}{m_e^3 c^6},$$

$$j_y = \frac{-N_2^2 e_e c p_0^2}{N_3 \gamma_0 m_e^2 c^2} \operatorname{ch}^{-2} \left( \sqrt{-\frac{\pi e_e^2 N_2 p_0^2}{c\gamma_0 (m_e c)^3}} x \right) \left[ 1 - \frac{3}{2} \operatorname{ch}^{-2} \left( \sqrt{-\frac{\pi e_e^2 N_2 p_0^2}{c\gamma_0 (m_e c)^3}} x \right) \right],$$

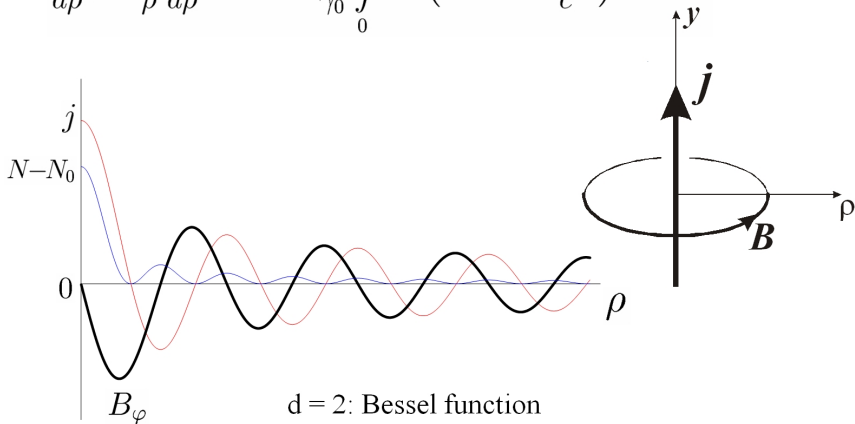
$$B_{z\max} = -\frac{4\sqrt{3} m_e c^2 N_2}{9 e_e N_3} \sqrt{-\frac{\pi e_e^2 N_2 p_0^2}{c\gamma_0 (m_e c)^3}}, \quad j_{y\max} = \frac{N_2^2 e_e c p_0^2}{2N_3 \gamma_0 (m_e c)^2}.$$





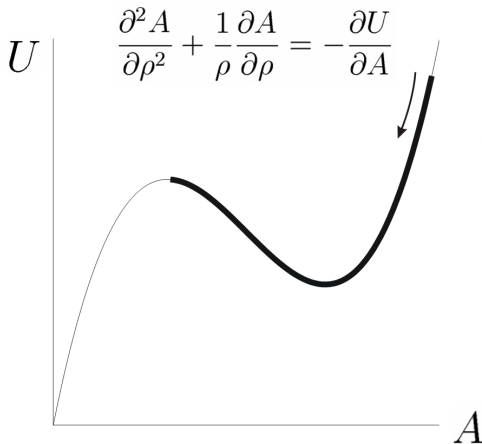
## Токовые филаменты

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} = -2\pi e \frac{p_0}{\gamma_0} \int_0^{2\pi} f_y \left( p \sin \theta + \frac{e}{c} A \right) \sin \theta d\theta$$



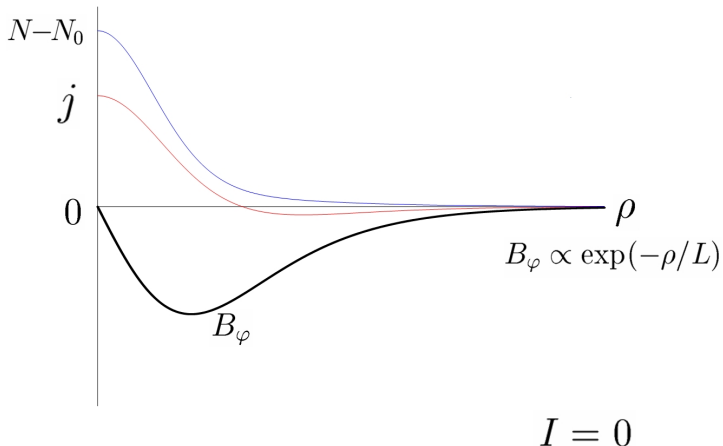


## Grad-Shafranov potential and effective viscous damping



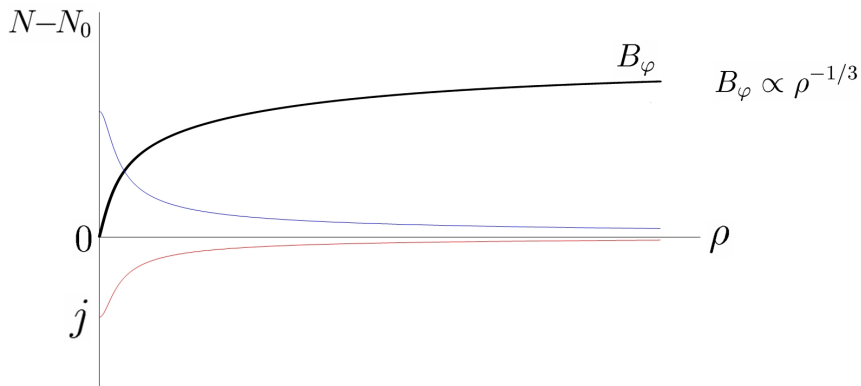


## Экранированный токовый филамент ( $d=3$ )





## Токовый филамент при $d = -1$





- $L \ll r_H$  - большинство частиц пролетные
- $L \gg r_H$  - большинство частиц захвачены

Степень анизотропии ограничена степенью разложения функции распределения:

$$\frac{\langle p_{\parallel}^2 \rangle}{\langle p_{\perp}^2 \rangle} < d$$

*Устойчивость в области малого магнитного поля:*

Возмущения с  $E \perp y$  могут быть неустойчивы при больших  $\frac{\langle p_x^2 \rangle}{\langle p_y^2 \rangle}$

Возмущения с  $k \perp y$ ,  $E \parallel y$  - устойчивы

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \left[ 5 \int \frac{f_{\alpha}^2(\mathcal{E})}{\gamma_a} \left( \frac{p}{mc} \right)^2 p^2 dp + 2 \int \frac{f_{\alpha}^4(\mathcal{E})}{\gamma_a} \left( \frac{p}{mc} \right)^4 p^2 dp \right] > 0$$

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \left[ 5 \int \frac{f_{\alpha}^2(\mathcal{E})}{\gamma_a} \left( \frac{p}{mc} \right)^2 p^2 dp + 6 \int \frac{f_{\alpha}^4(\mathcal{E})}{\gamma_a} \left( \frac{p}{mc} \right)^4 p^2 dp \right] < 0$$



## Степенные спектры синхротронного излучения

$$f_{\alpha}(P, p) \propto p^{-\alpha} \left( \frac{p_y + e_{\alpha} A_y / c}{m_{\alpha} c} \right)^2$$

$$\frac{dI}{d\omega} \propto \omega^{-(\alpha-5)/2} \cos^2 \theta + 2\omega^{-(\alpha-4)/2} \frac{e_{\alpha} A_y}{c} \cos \theta + \omega^{-(\alpha-3)/2} \frac{e_{\alpha}^2 A_y^2}{c^2}$$

- Одногорбые или двугорбые спектры при  $3 < \alpha < 5$
- Для хаотического набора филаментов анизотропия отсутствует
- Радиационные потери можно не учитывать при

$$\gamma \ll \left( \frac{48\pi N m^5 c^{12}}{B^4 v^2 e^6} \right)^{1/3} \approx 1.65 \cdot 10^9 N^{1/3} B^{-4/3}$$