Всероссийская молодежная школа
“Суперкомпьютерные технологии и высокопроизводительные вычисления в образовании, науке и промышленности”

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вл.В.Воеводин
Заместитель директора НИВЦ МГУ,
член-корреспондент РАН,
voevodin@parallel.ru

ННГУ – 26 октября 2009 г.

Пользователь: почему?

$A_{ijk} = A_{i-1jk} + B_{jk} + B_{jk}$, i=1,40; j=1,40; k=1,1000

Cray C90, пиковая производительность 960 Mflop/s

```
do k = 1, 1000
   do j = 1, 40
      do i = 1, 40
         A(i,j,k) = A(i-1,j,k)+B(j,k)+B(j,k)
```

Производительность: **20** Mflop/s на Cray C90

Пользователь: почему?

$A_{ijk} = A_{i-1jk} + B_{jk} + B_{jk}$, i=1,40; j=1,40; k=1,1000

Cray C90, пиковая производительность 960 Mflop/s

```
do i = 1, 40, 2
   do j = 1, 40
      do k = 1, 1000
         A(i,j,k) = A(i-1,j,k)+2*B(j,k)
         A(i+1,j,k) = A(i,j,k)+2*B(j,k)
```

Производительность: **700** Mflop/s на Cray C90

Умножение матриц: все ли просто?

Фрагмент исходного текста:

```
for( i = 0; i < n; ++i)
    for( j = 0; j < n; ++j)
        for( k = 0; k < n; ++k)
            A[i][j] = A[i][j] + B[i][k]*C[k][j]
```

Порядок циклов: (i, j, k)

Возможен ли порядок:

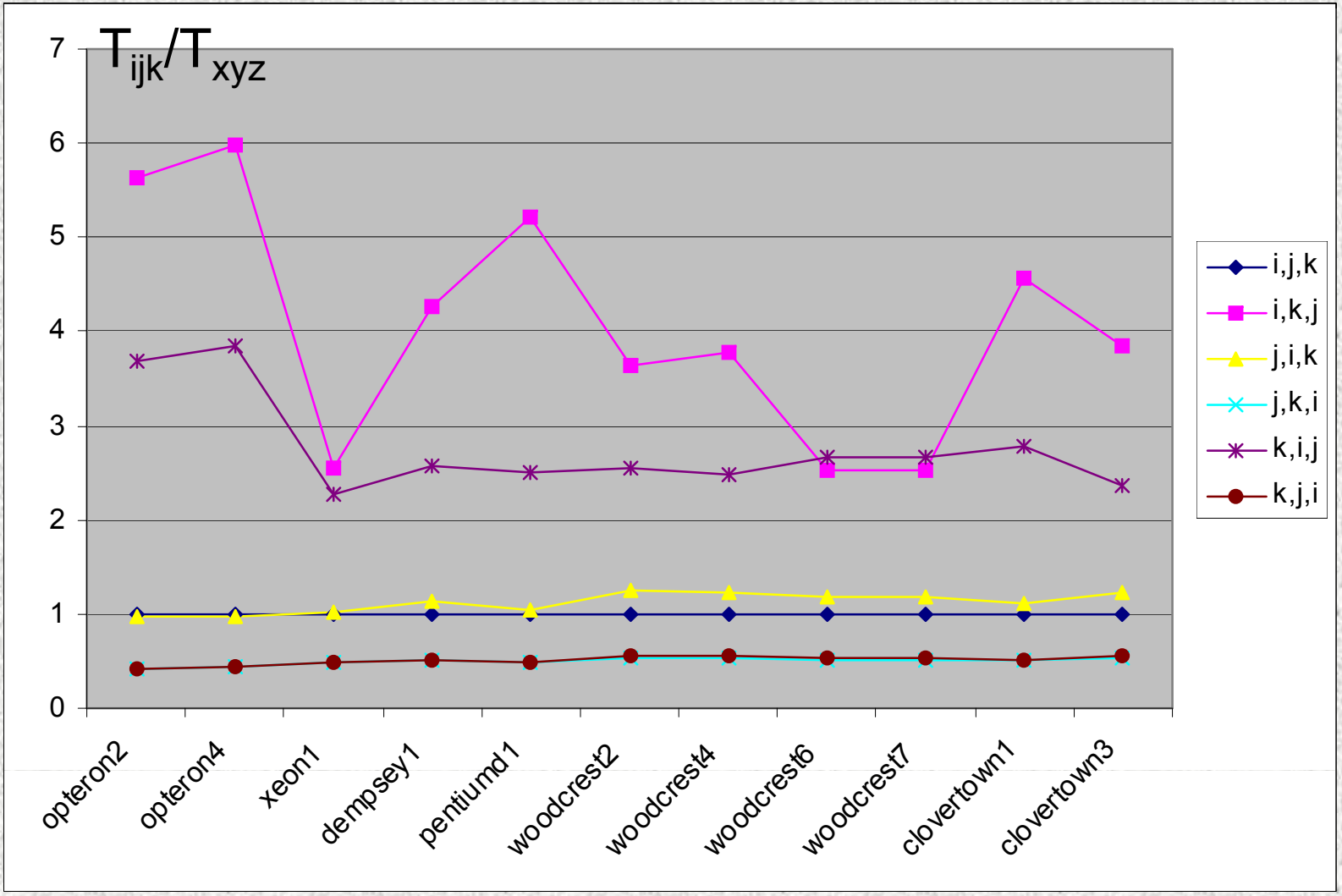
(i, k, j) - ?	ДА
(k, i, j) - ?	ДА
(k, j, i) - ?	ДА
(j, i, k) - ?	ДА
(j, k, i) - ?	ДА

Почему возможен другой порядок?

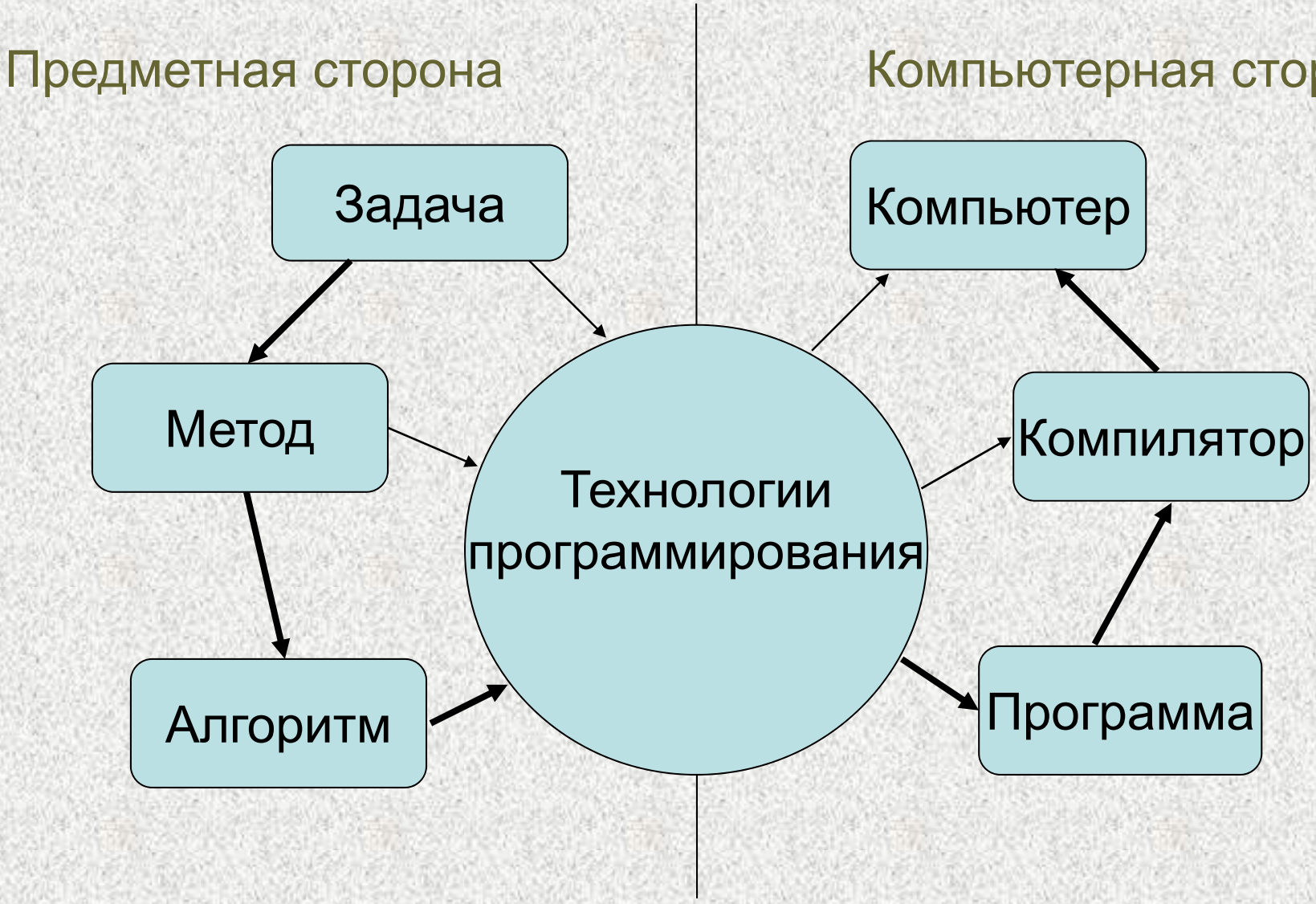
А зачем нужен другой порядок?

Умножение матриц: все ли просто?

(сравнение с порядком (i, j, k))



Решение задачи на компьютере



Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

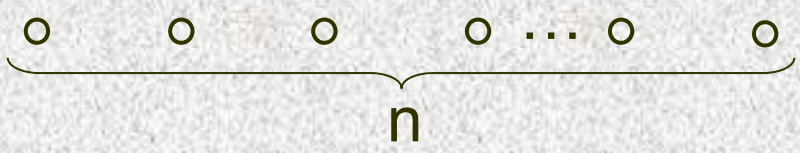
Вершины: процедуры, циклы, линейные участки, операторы, итерации циклов, срабатывания операторов…

Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

Вершины: итерации циклов.

```
for( i = 0; i < n; ++i) {
    A[i] = A[i – 1] + 2;
    B[i] = B[i] + A[i];
}
```



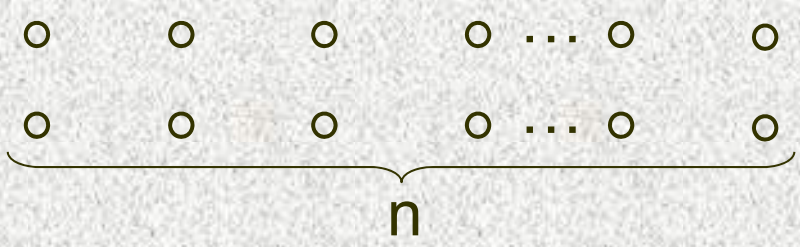
Каждая вершина соответствует двум операторам (телу цикла), выполненным на одной и той же итерации цикла.

Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

Вершины: срабатывания операторов.

```
for( i = 0; i < n; ++i) {
    A[i] = A[i – 1] + 2;
    B[i] = B[i] + A[i];
}
```



Каждая вершина соответствует одному из двух операторов тела данного цикла, выполненному на некоторой итерации.

Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

Вершины: процедуры, циклы, линейные участки, операторы, итерации циклов, срабатывания операторов…

Дуги: отражают связь (отношение) между вершинами.
Выделяют два типа отношений:
- *операционное отношение,*
- *информационное отношение.*

Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

Дуги: операционное отношение:

Две вершины A и B соединяются направленной дугой тогда и только тогда, когда вершина B может быть выполнена сразу после вершины A.

Операционное отношение = отношение по передаче управления.

Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

Дуги: операционное отношение:

x(i) = a + b(i) (1)
y(i) = 2*x(i) – 3 (2)
t1 = y(i)*y(i) + 1 (3)
t2 = b(i) – y(i)*a (4)

Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

Дуги: информационное отношение:

Две вершины A и B соединяются направленной дугой тогда и только тогда, когда вершина B использует в качестве аргумента некоторое значение, полученное в вершине A.

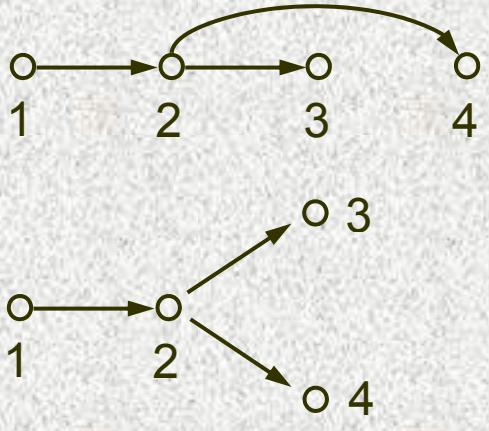
Информационное отношение = отношение по передаче данных.

Графовые модели программ

Будем представлять программы с помощью графов: набор вершин и множество соединяющих их направленных дуг.

Дуги: информационное отношение:

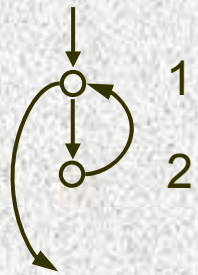
x(i) = a + b(i) (1)
y(i) = 2*x(i) – 3 (2)
t1 = y(i)*y(i) + 1 (3)
t2 = b(i) – y(i)*a (4)



Четыре основные модели программ

Граф управления программы.
Вершины: операторы
Дуги: операционное отношение

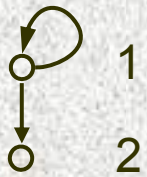
```
for( i = 0; i < n; ++i) {
    A[i] = A[i – 1] + 2;        (1)
    B[i] = B[i] + A[i];         (2)
}
```



Четыре основные модели программ

Информационный граф программы.
Вершины: операторы
Дуги: информационное отношение

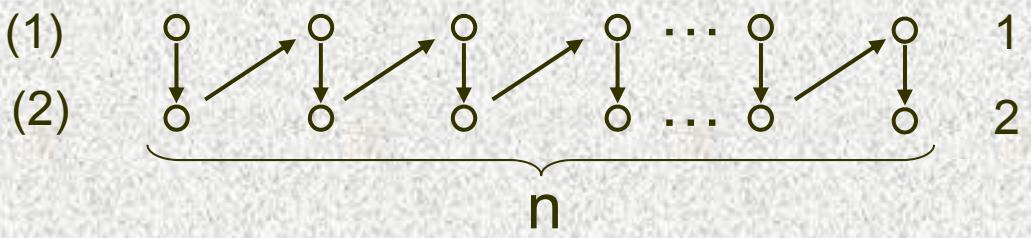
```
for( i = 0; i < n; ++i) {
    A[i] = A[i – 1] + 2;        (1)
    B[i] = B[i] + A[i];         (2)
}
```



Четыре основные модели программ

Операционная история программы.
Вершины: срабатывания операторов
Дуги: операционное отношение

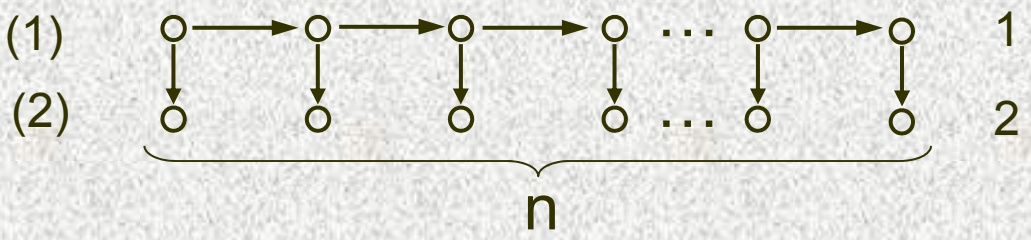
```
for( i = 0; i < n; ++i) {
    A[i] = A[i – 1] + 2;
    B[i] = B[i] + A[i];
}
```



Четыре основные модели программ

Информационная история программы.
Вершины: срабатывания операторов
Дуги: информационное отношение

```
for( i = 0; i < n; ++i) {
    A[i] = A[i – 1] + 2;
    B[i] = B[i] + A[i];
}
```

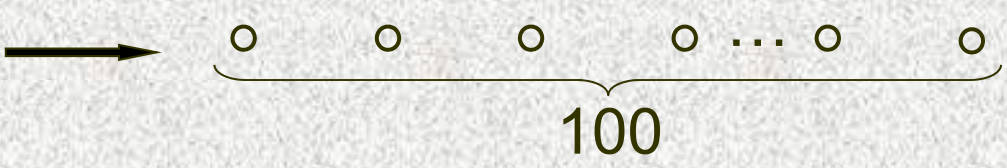


Несколько вопросов…

Может ли информационная история некоторого фрагмента программы иметь 100 вершин и ни одной дуги?

ДА.

```
for( i = 0; i < 100; ++i)
    A[i] = B[i] + C[i]*x;
```

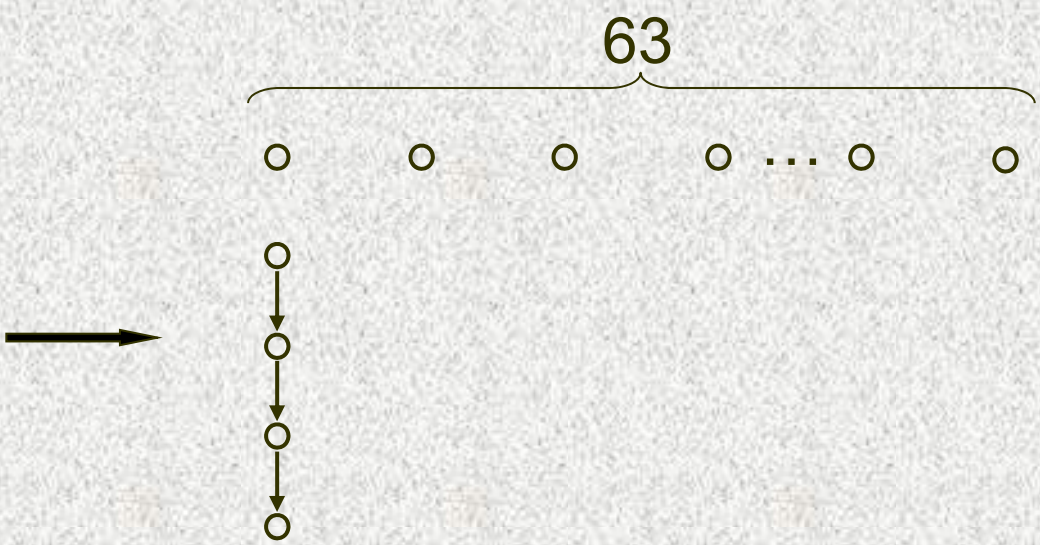


Несколько вопросов…

Может ли информационная история некоторого фрагмента программы иметь 67 вершин и 3 дуги?

ДА.

```
for( i = 0; i < 63; ++i)
    A[i] = B[i] + C[i]*x;
x1 = 10;
x2 = x1+1;
x3 = x2+2;
x4 = x3+3;
```



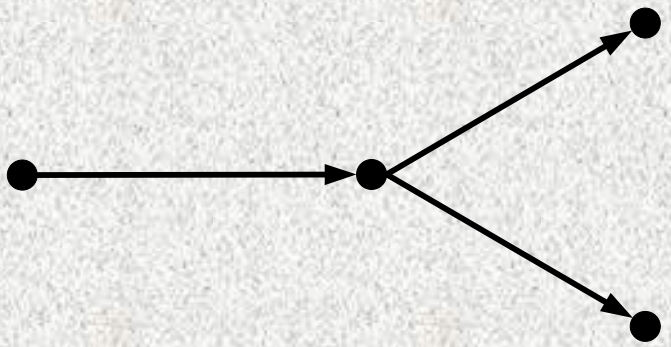
Несколько вопросов…

Может ли информационная история некоторого фрагмента программы иметь 20 вершин и 200 дуг?

НЕТ.

Несколько вопросов…

Модель некоторого фрагмента программы в качестве подграфа содержит следующий граф:



Какой моделью могла бы быть исходная модель?

ГУ ИГ ~~ОИ~~ ИИ

Множество графовых моделей программ

(опорные точки)

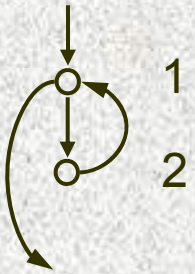
Операционные модели

Информационные модели

Компактные модели

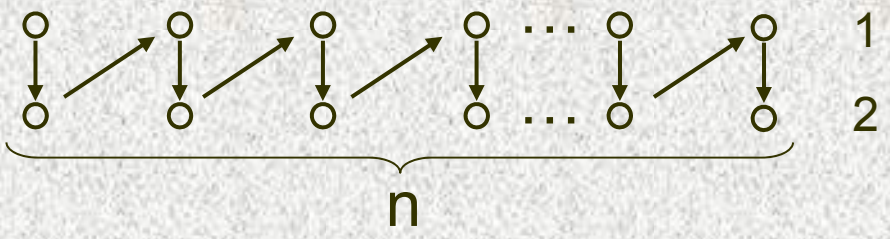
Истории

Граф управления

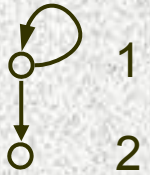


…

Операционная история

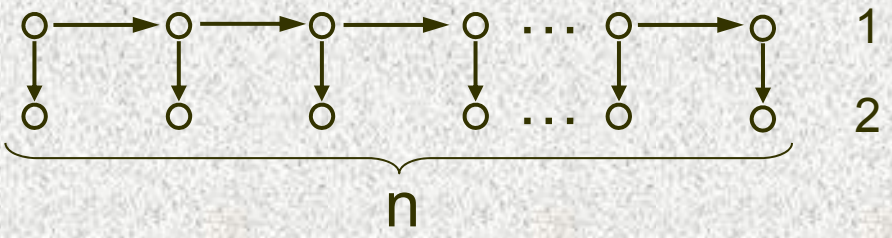


Информационный граф



…

Информационная история



Какое отношение выбрать для описания свойств программ?

Операционное отношение?

x(i) = a + b(i) (1)
y(i) = 2*x(i) – 3 (2)
t1 = y(i)*y(i) + 1 (3)
t2 = b(i) – y(i)*a (4)

Какое отношение выбрать для описания свойств программ?

Информационная структура – это основа анализа свойств программ и алгоритмов.

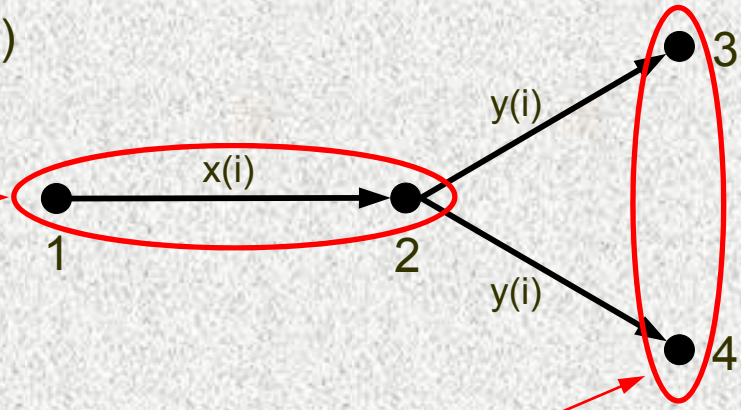
x(i) = a + b(i) (1)

y(i) = 2*x(i) – 3 (2)

t1 = y(i)*y(i) + 1 (3)

t2 = b(i) – y(i)*a (4)

Исполнять только последовательно !

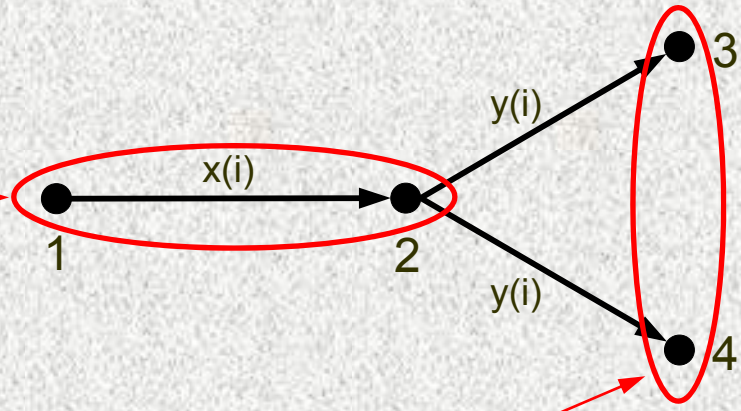


Можно исполнять параллельно !

Какое отношение выбрать для описания свойств программ?

Информационная структура – это основа анализа свойств программ и алгоритмов.

Исполнять только последовательно !



Можно исполнять параллельно !

Информационная зависимость определяет критерий эквивалентности преобразований программ.

Информационная независимость определяет ресурс параллелизма программы.

От компактных до историй: что выбрать для описания свойств программ?

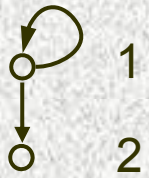
Аргументы для выбора степени компактности модели:

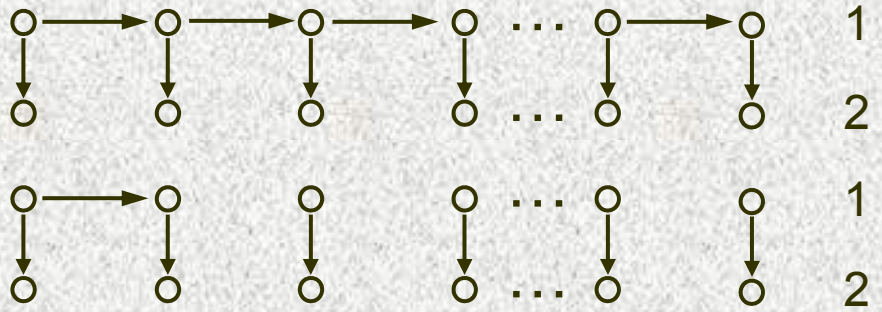
- *компактность описания,*
- *информативность,*
- *сложность построения.*

От компактных до историй: что выбрать для описания свойств программ?

Аргументы для выбора степени компактности модели:

- *компактность описания,*
- *информативность,*





- *сложность построения.*

От компактных до историй: что выбрать для описания свойств программ?

Аргументы для выбора степени компактности модели:

- *компактность описания,* *(компактные +)*
- *информативность,* *(истории +)*
- *сложность построения.* *(компактные +)*

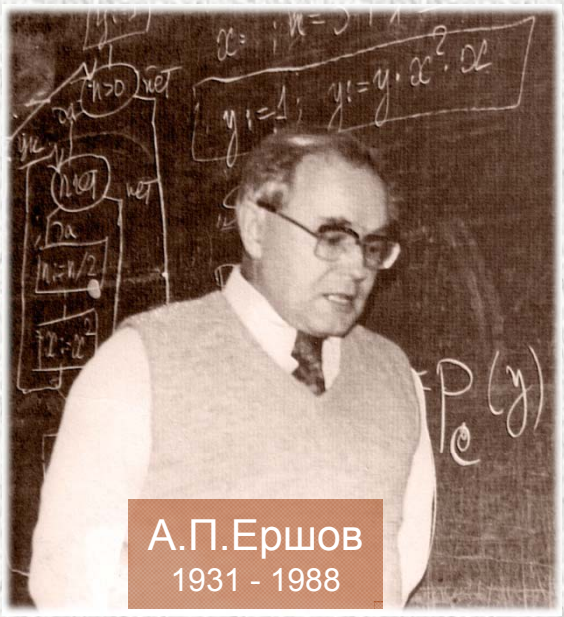
Граф алгоритма – это параметризованная информационная история:

- *компактность описания за счет параметризации,*
- *имеет информативность истории,*
- *разработана методика построения графа алгоритма по исходному тексту программ.*

Схема анализа и преобразования структуры программ

Исходная программа

Преобразованная программа



Исследован
графа алго

Теорема о построении графа алгоритма

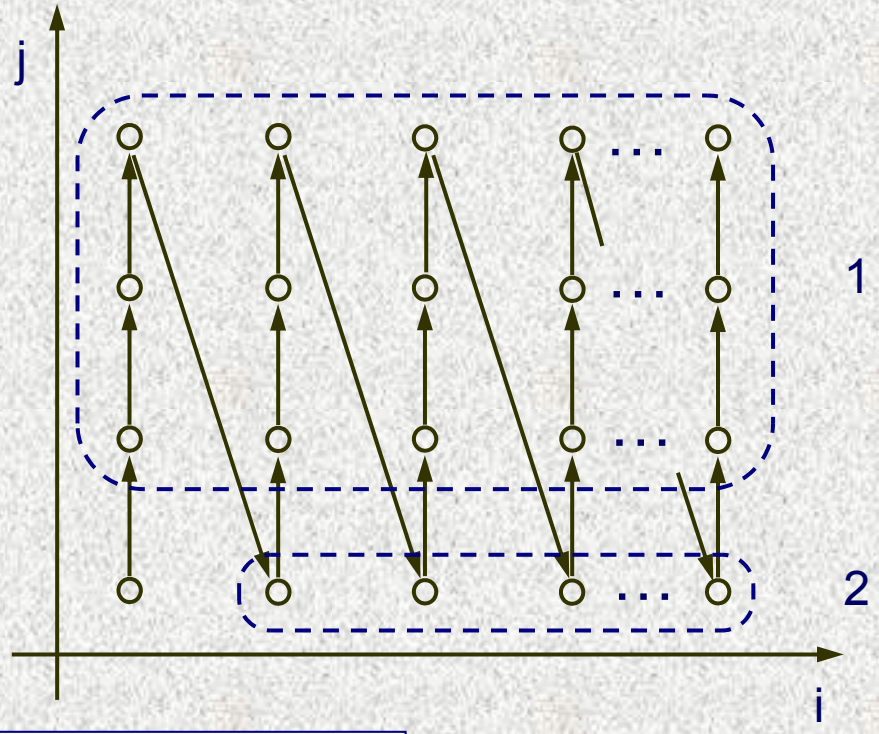
<u>Теорема.</u> Если фрагмент принадлежит к линейному классу программ, то на основе статического анализа можно построить компактное описание его графа алгоритма в следующем виде:
для каждого входа каждого оператора фрагмента будет указано конечное множество троек вида

$$(N, \Delta(N), F(\Delta, N))_k ,$$

где:
N – линейный выпуклый многогранник в пространстве внешних переменных фрагмента,
$\Delta(N)$ – линейный выпуклый многогранник в пространстве итераций фрагмента,
$F(\Delta, N)$ – линейная векторная функция, описывающая входящие дуги оператора.

Программы и их графы алгоритма

```
Do i = 1, n
   Do j = 1, m
      s = s + A(i, j)
```



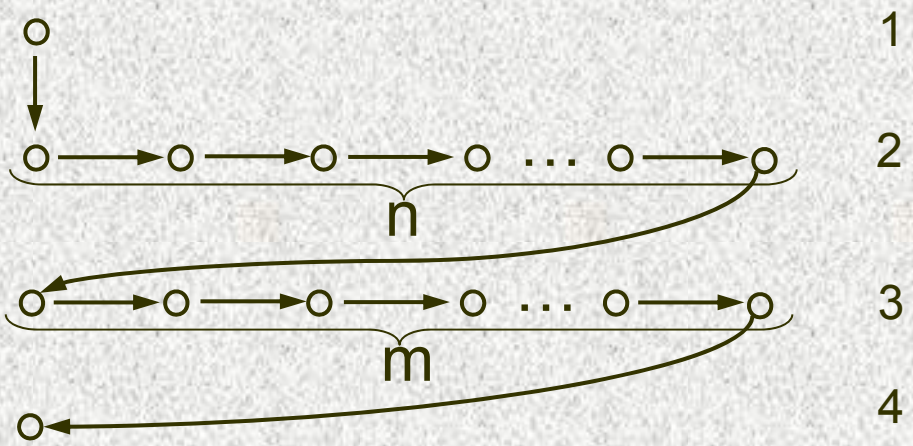
Для входа s:

$$N_1 = \begin{cases} n \geq 1 \\ m \geq 2 \end{cases} \quad I_1 = \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq m \end{cases} \quad F_1 = \begin{cases} i' = i \\ j' = j - 1 \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} n \geq 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \quad I_2 = \begin{cases} 2 \leq i \leq n \\ j = 1 \end{cases} \quad F_2 = \begin{cases} i' = i - 1 \\ j' = m \end{cases}$$

Программы и их графы алгоритма

```
s = 0                (1)
Do i = 1, n
    s = s + 1        (2)
Do i = 1, m
    s = s + 1        (3)
s = s + 1            (4)
```



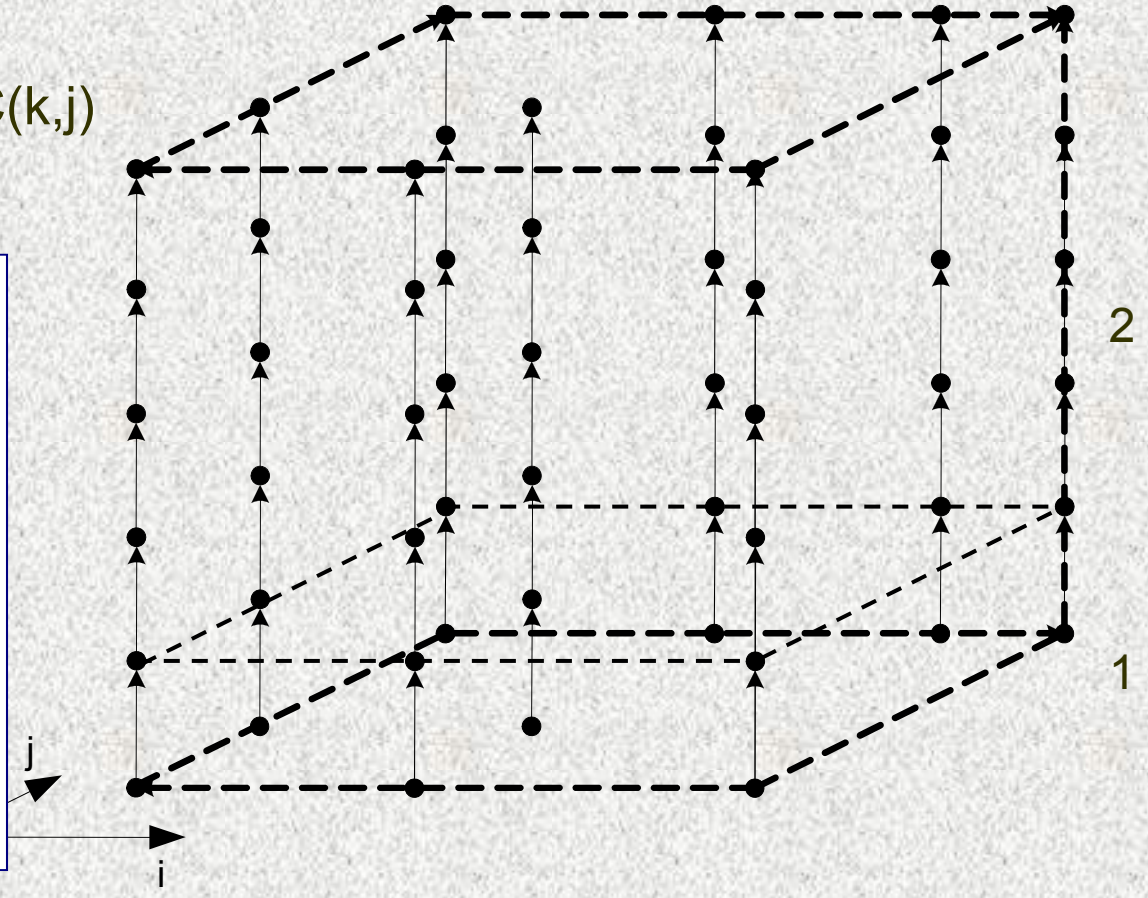
$$\begin{cases} m \geq 1 \\ j_1 = m \\ из\ 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} m < 1 \\ n \geq 1 \\ j_1 = n \\ из\ 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m < 1 \\ n < 1 \\ из\ 1 \end{cases}$$

Программы и их графы алгоритма

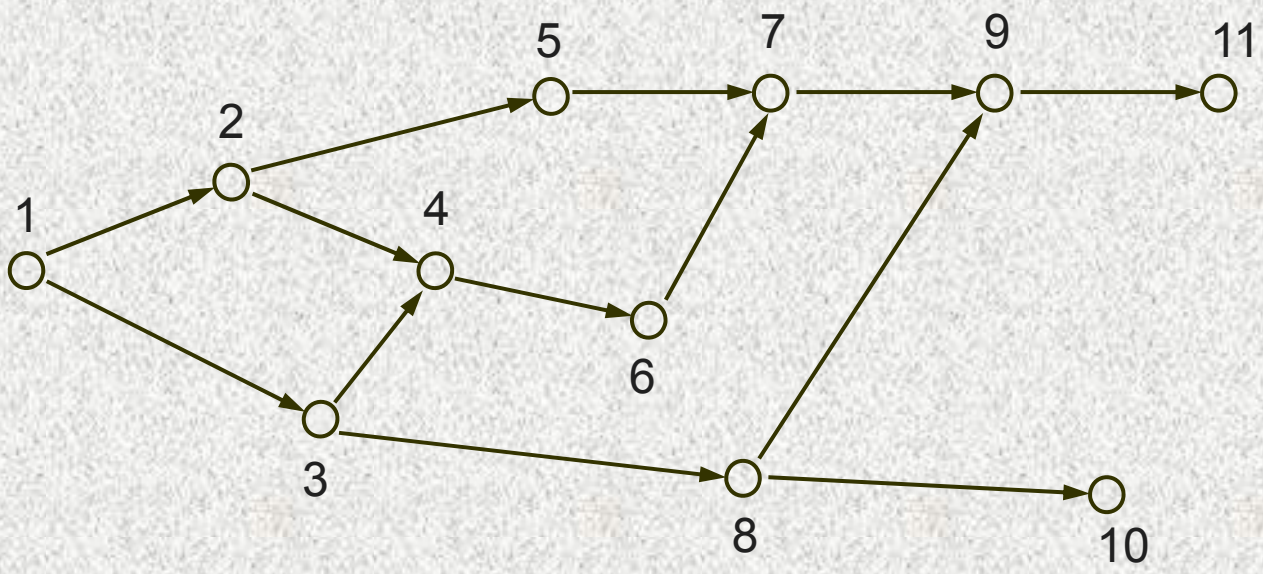
(умножение матриц)

```
      Do i = 1, n
        Do j = 1, n
1         A(i,j) = 0
          Do k = 1, n
2           A(i,j) = A(i,j) + B(i,k)*C(k,j)
```

$$\begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \\ k = 1 \\ \begin{cases} i_1 = i \\ j_1 = j \end{cases} \\ из\ (1) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \\ 2 \le k \le n \\ \begin{cases} i_1 = i \\ j_1 = j \\ k_1 = k - 1 \end{cases} \\ из\ (2) \end{cases}$$

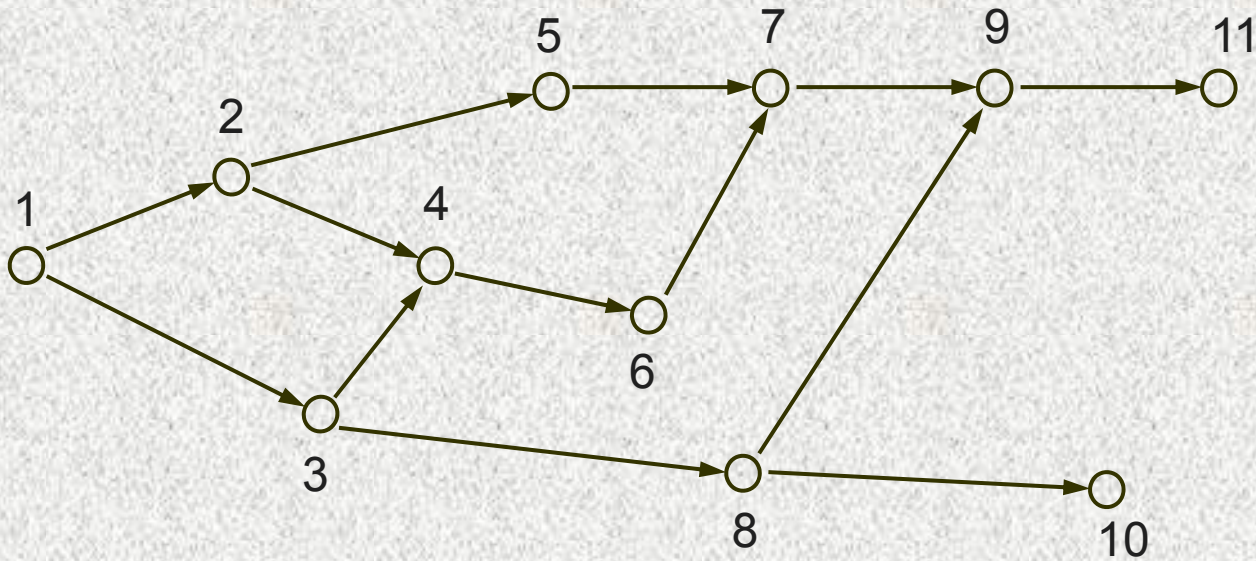


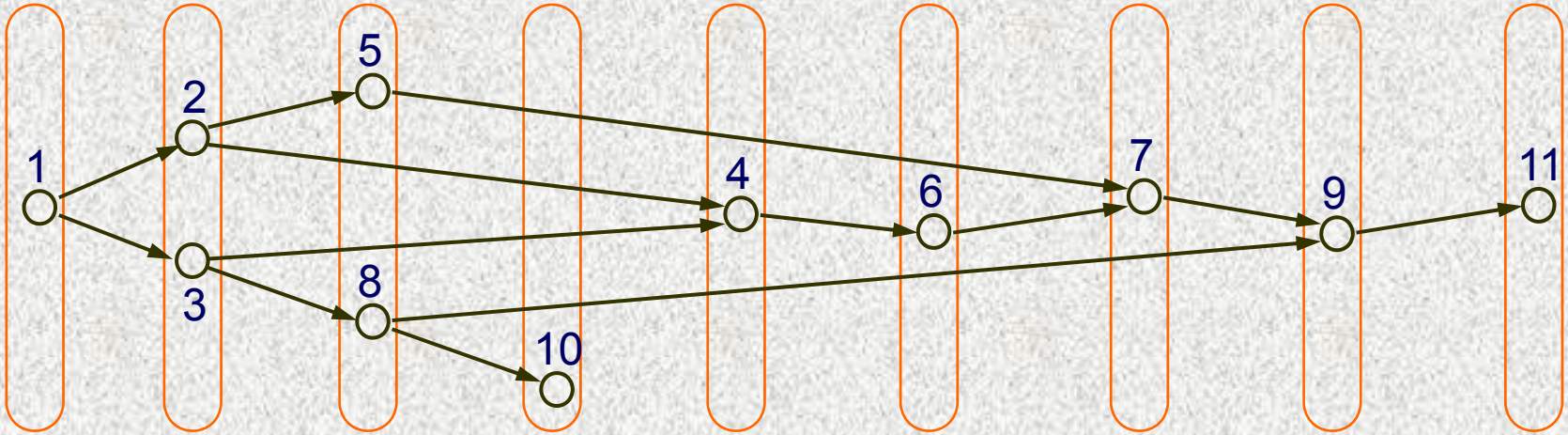
Ярусно-параллельная форма графа алгоритма



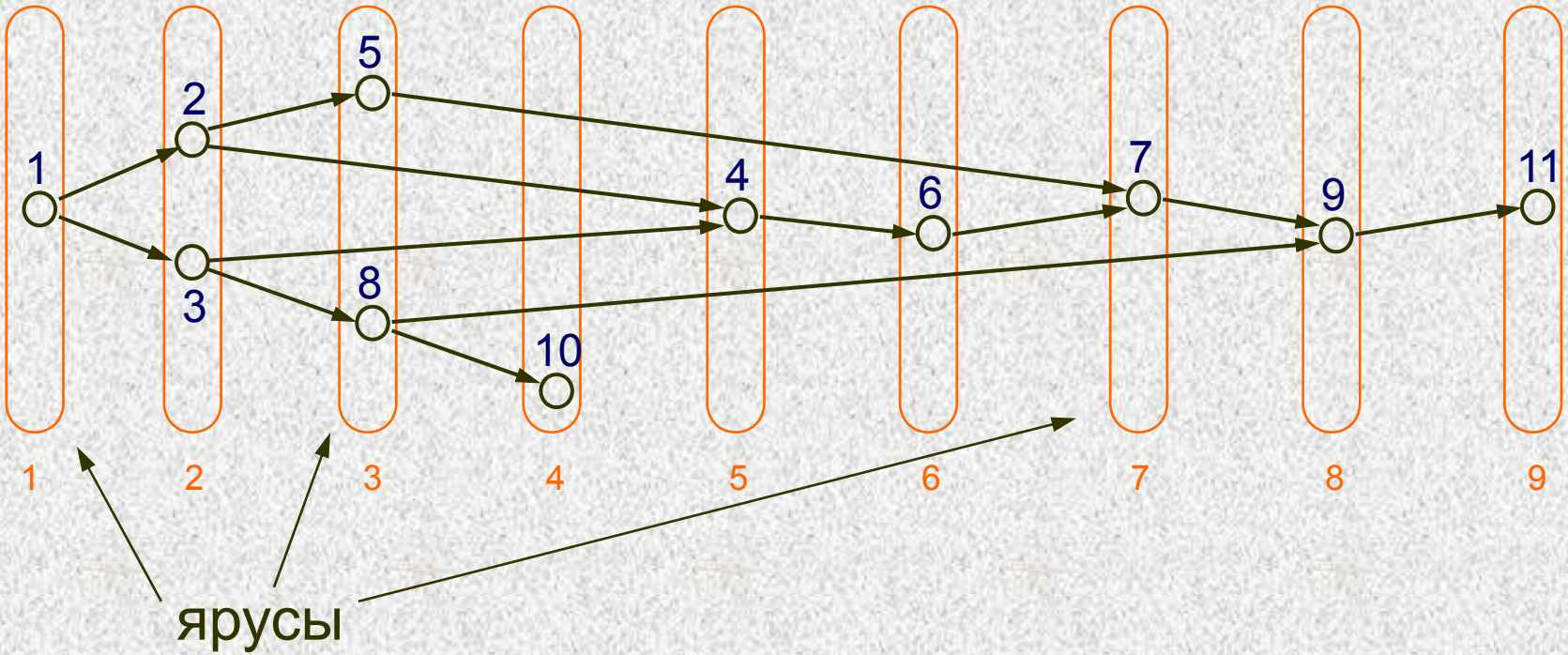
Как определить и сделать понятным ресурс параллелизма в графе алгоритма (в программе, в алгоритме) ?

Ярусно-параллельная форма графа алгоритма





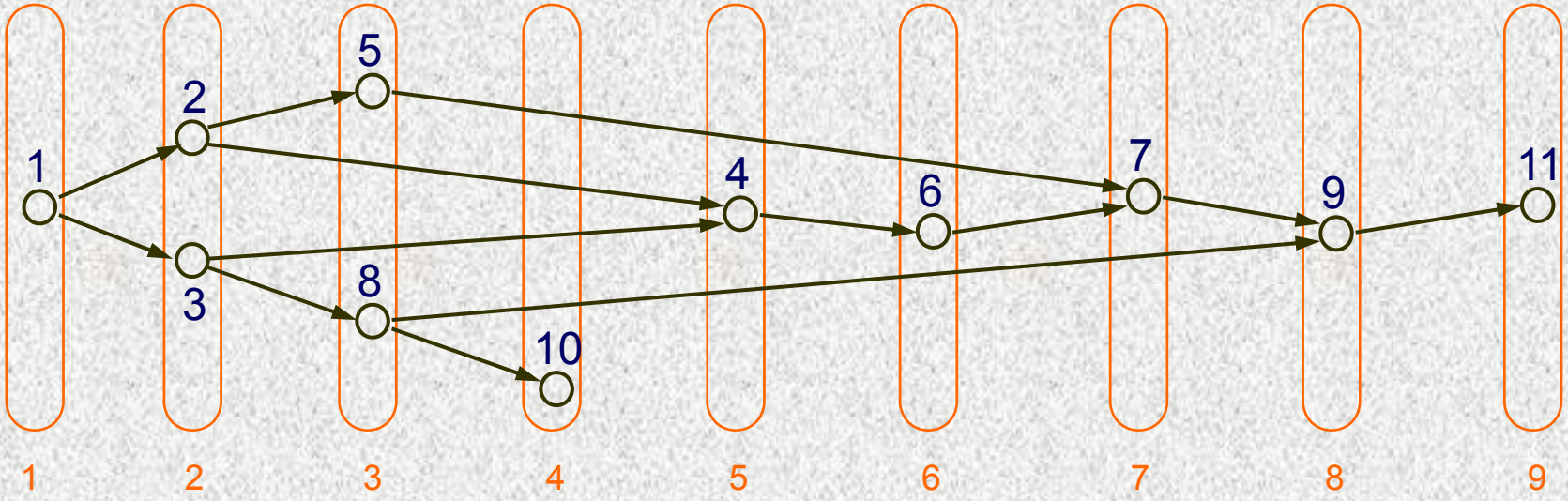
Ярусно-параллельная форма графа алгоритма



- начальная вершина каждой дуги расположена на ярусе с номером меньшим, чем номер яруса конечной вершины,

- между вершинами, расположенными на одном ярусе, не может быть дуг.

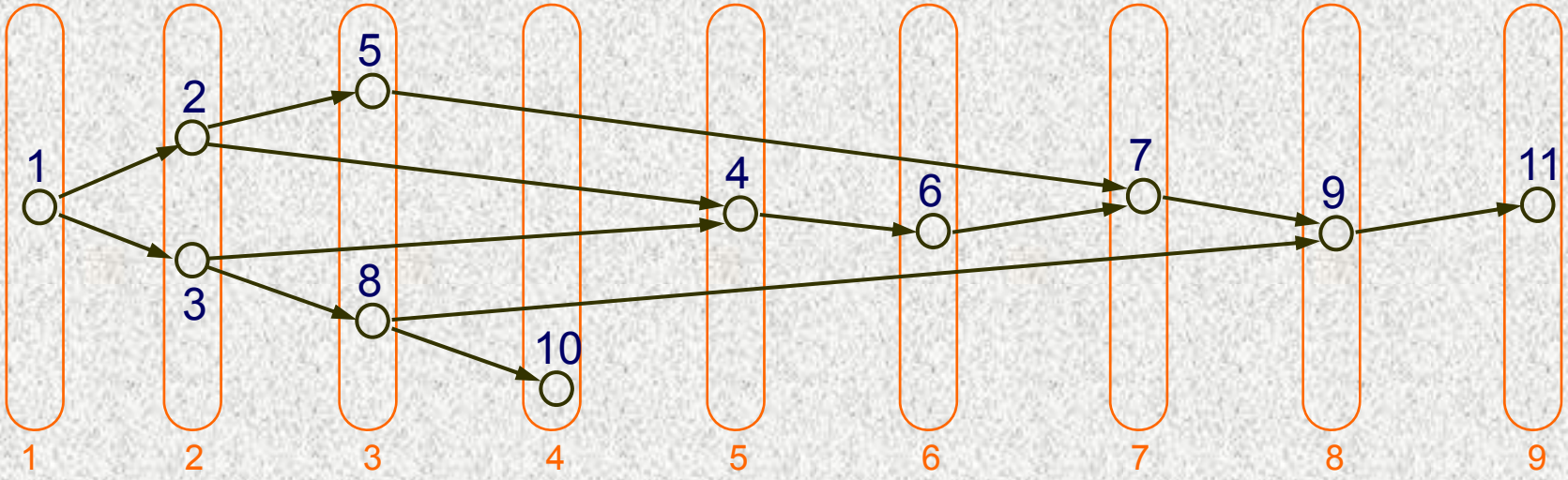
Ярусно-параллельная форма графа алгоритма

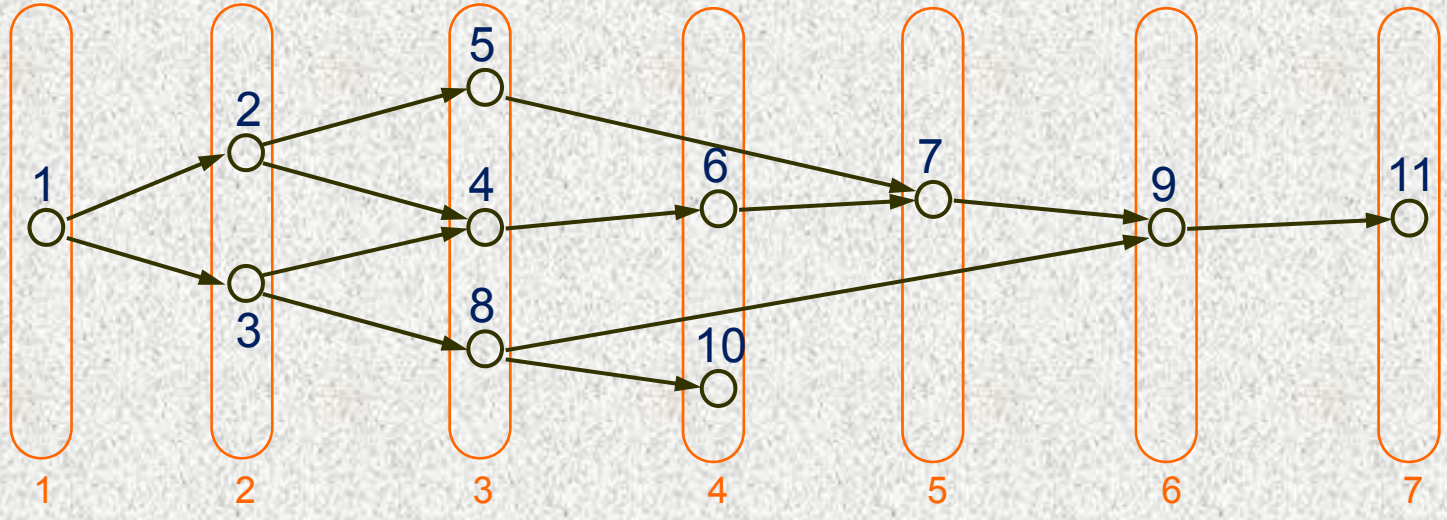


Высота ЯПФ – это число ярусов,
Ширина яруса – число вершин, расположенных на ярусе,
Ширина ЯПФ – это максимальная ширина ярусов в ЯПФ.

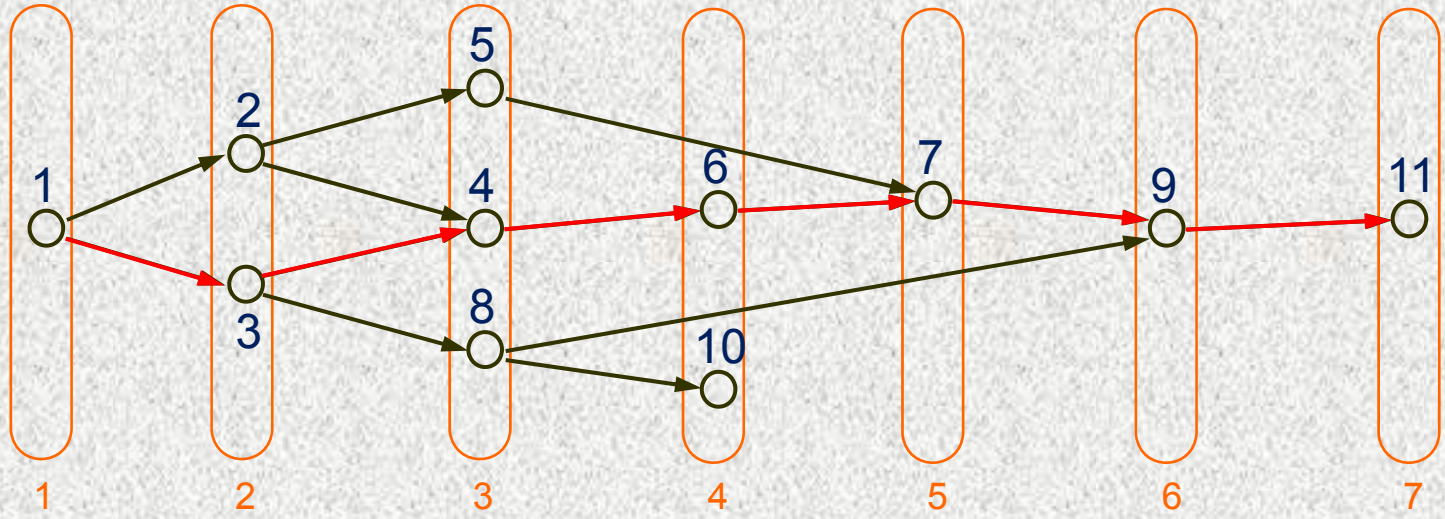
Высота ЯПФ = сложность параллельной реализации алгоритма/программы.

Ярусно-параллельная форма графа алгоритма





Каноническая ярусно-параллельная форма графа алгоритма



Высота канонической ЯПФ = длине критического пути + 1.

Каноническая ярусно-параллельная форма графа алгоритма

```
for( i = 0; i < n; ++i)
    for( j = 0; j < m; ++j)
        A[i][j] = A[i][j–1] + C[i][j]*x;
```

Чему, согласно закону Амдала, равно максимальное ускорение, которое можно получить при исполнении данного фрагмента на параллельной вычислительной системе?

Закон Амдала:

$$S \le \frac{1}{\alpha + \frac{(1-\alpha)}{p}}$$

где:
α *– доля последовательных операций,*
p – число процессоров в системе.

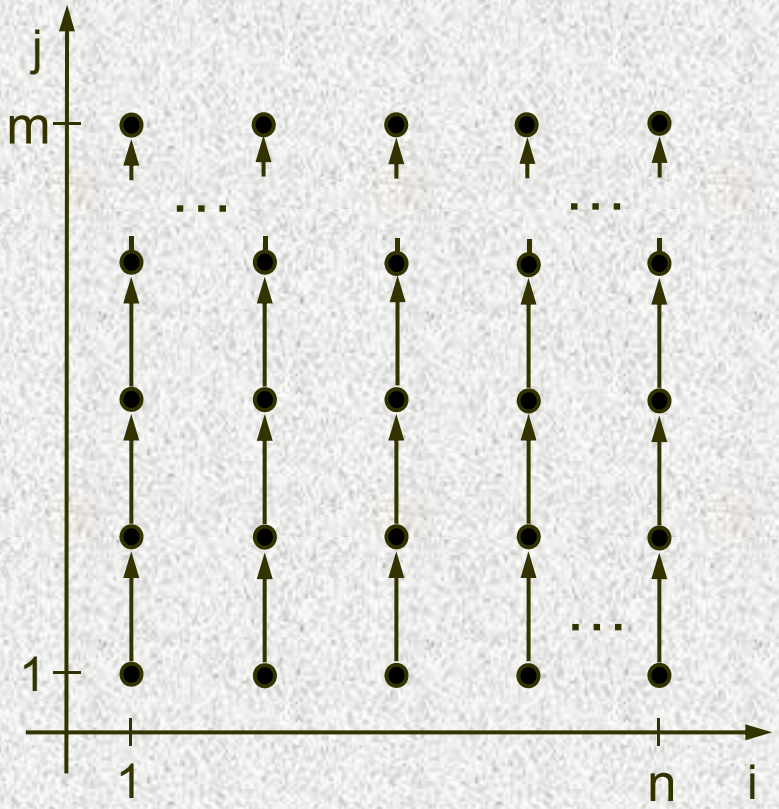
Каноническая ярусно-параллельная форма графа алгоритма

```
for( i = 0; i < n; ++i)
    for( j = 0; j < m; ++j)
        A[i][j] = A[i][j–1] + C[i][j]*x;
```

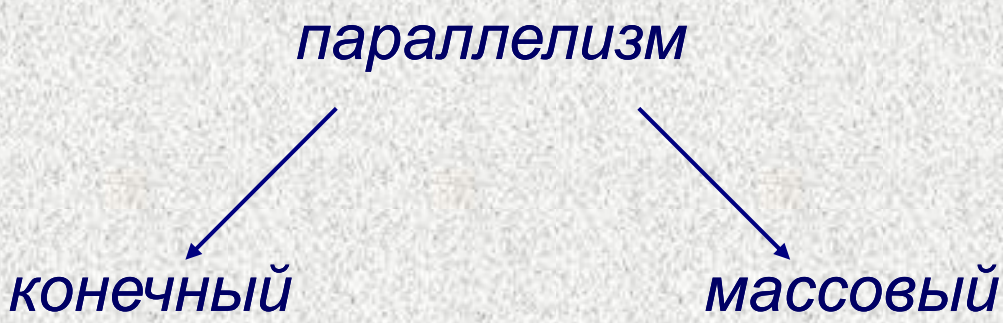
$$S \approx \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\text{Число последовательных операций}}{\text{Общее число операций}} = \frac{m}{n*m} = \frac{1}{n}$$

$$S \approx n$$



Виды параллелизма в алгоритмах и программах



Конечный параллелизм определяется информационной независимостью некоторых фрагментов в тексте программы.

Массовый параллелизм определяется информационной независимостью итераций циклов программы.

Виды параллелизма в алгоритмах и программах

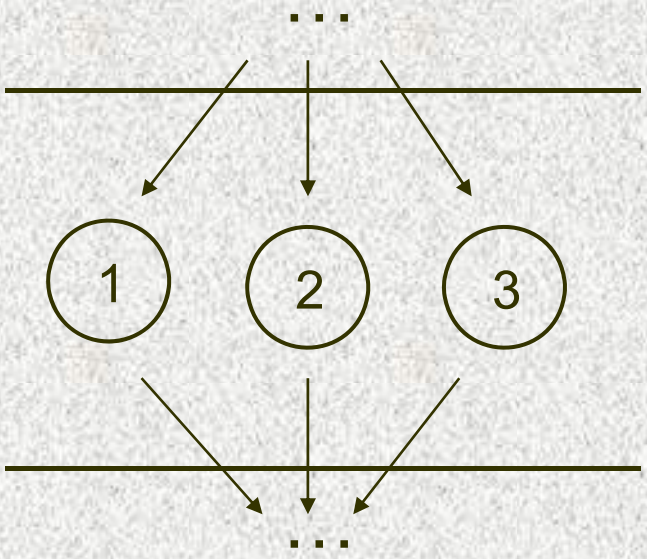
Конечный параллелизм.

```
cout << "N=" << N << endl;
cycleTestWithUnroll_KJI("k");
cycleTestWithUnroll_KJI("j");
cycleTestWithUnroll_KJI("i");
cycleTestWithUnroll_KJI_3("k");
cycleTestWithUnroll_KJI_3("j");
cycleTestWithUnroll_KJI_3("i");
cycleTest("j,i,k");
cycleTest("i,k,j");
cycleTest("k,j,i");
cycleTest("i,j,k");
cycleTest("k,i,j");
cycleTest("j,k,i");
float ***a12=new float**[N];
for (i=0;i<N;i++) {
   a12[i]=new float*[N];
   for (j=0;j<N;j++) {
      a12[i][j]=new float[N];
      for (k=0;k<N;k++) {
         a12[i][j][k]=(float)1/(i+j+k+1);
      }
   }
}
for (i=1;i<N;i++)
   for (j=1;j<N;j++)
      for (k=1;k<N;k++) {
         testee[i][k] = testee[i][k] + S[k]*A[k][j][i] + P[i][j]*A[k][j][i-1] +
            P[i][k]*A[k][j-1][i] + P[j][k]*A[k-1][j][i];
      }
…
```

1

2

3

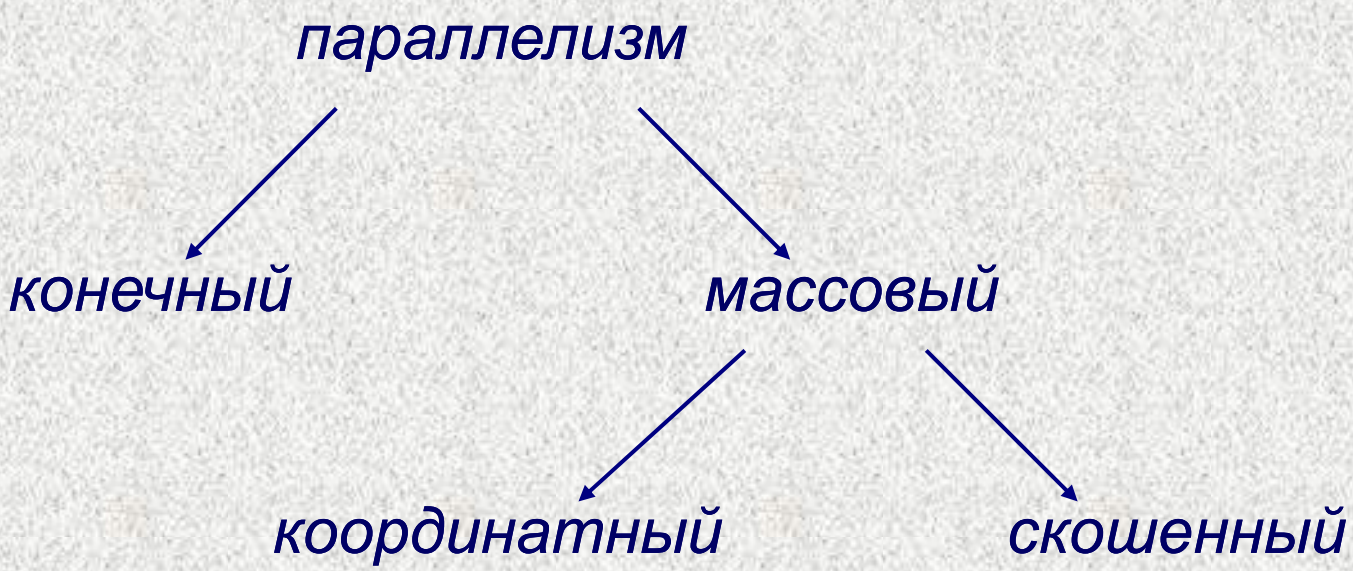


Виды параллелизма в алгоритмах и программах

Массовый параллелизм.

```
for( i = 0; i < n; ++i)
    A[i] = B[i] + C[i]*x;
```

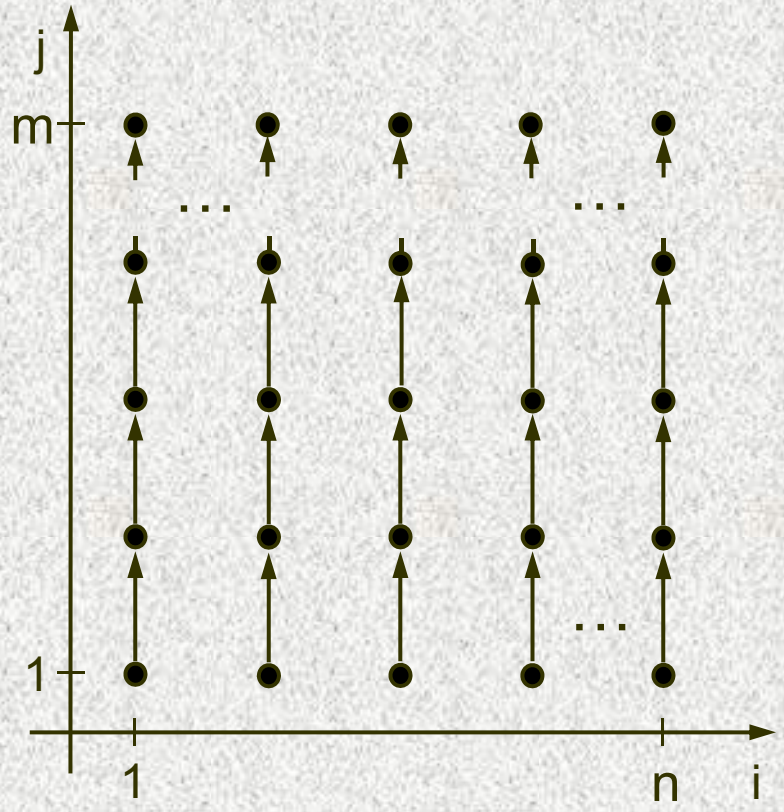
Виды параллелизма в алгоритмах и программах



Виды параллелизма в алгоритмах и программах

Координатный параллелизм.

```
#pragma omp parallel for
for( i = 0; i < n; ++i)
    for( j = 0; j < m; ++j)
        A[i][j] = A[i][j–1] + C[i][j]*x;
```



Виды параллелизма в алгоритмах и программах

Координатный параллелизм.

***Утверждение**: для того чтобы цикл был параллельным необходимо и достаточно, чтобы для любой тройки графа алгоритма данного цикла включение* $\Delta_i \subset G_i$ *было верным, где*

Δ_i *— это многогранник из тройки,*

G_i *= {*$f_1 = i_1$*,*

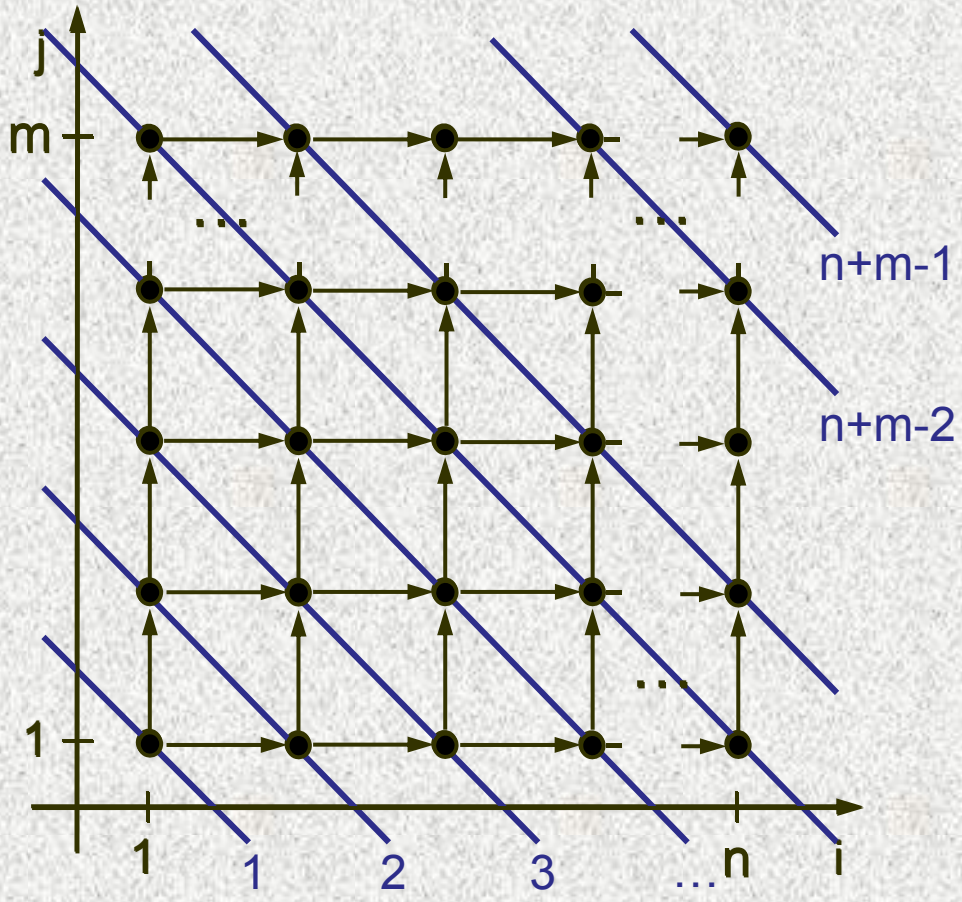
i_1 *— это параметр анализируемого цикла,*

f_1 *— это первая компонента векторной функции* F_i *из тройки.*

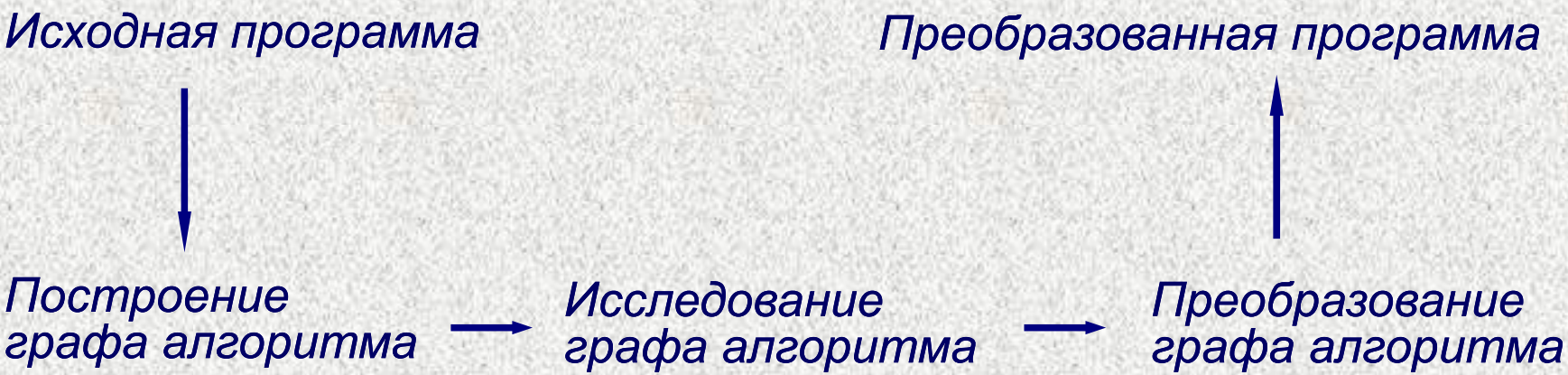
Виды параллелизма в алгоритмах и программах

Скошенный параллелизм.

```
for( i = 0; i < n; ++i)
    for( j = 0; j < m; ++j)
        A[i][j] = A[i][j–1] + A[i-1][j]*x;
```



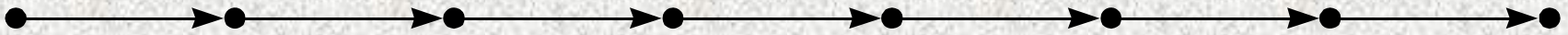
Эквивалентные преобразования программ



Эквивалентные преобразования программ

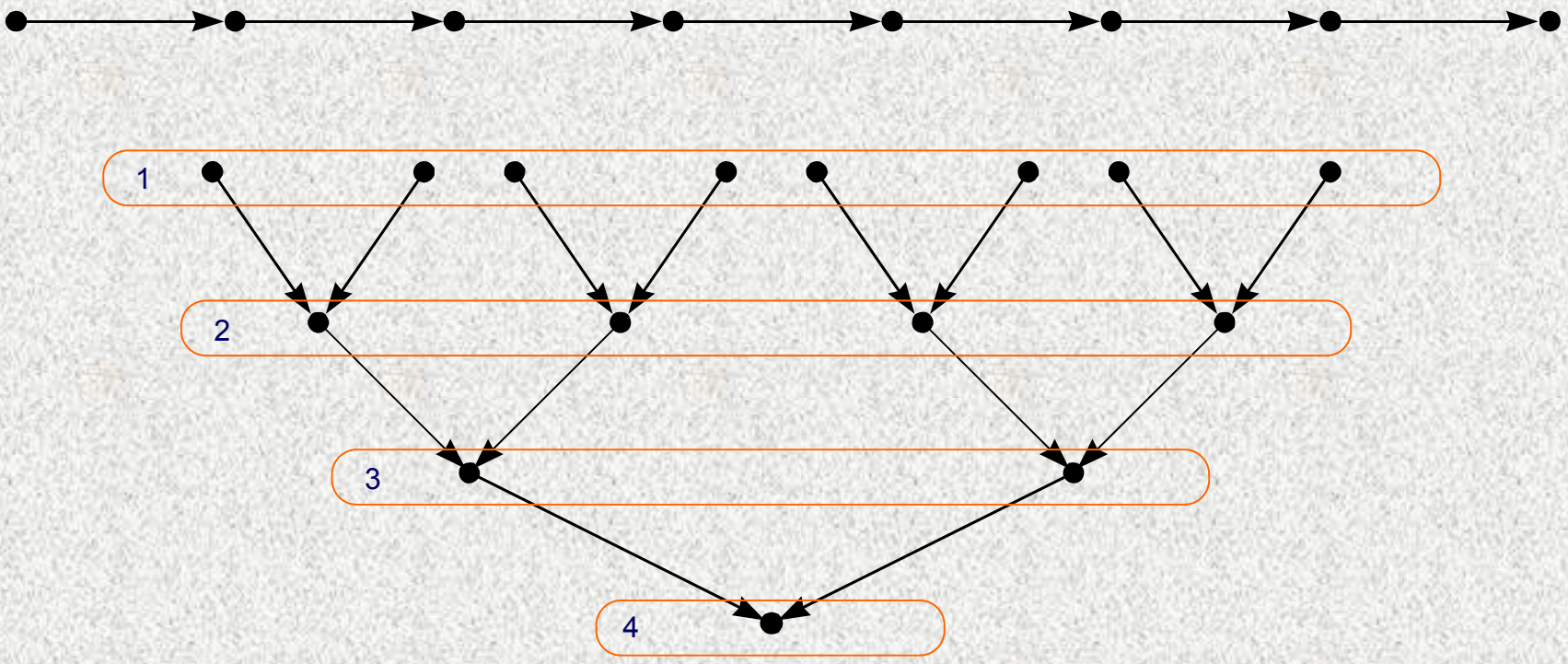
(суммирование элементов массива)

```
s = 0.0;
for ( i = 0; i < n; ++i )
    s = s + A[ i ];
```



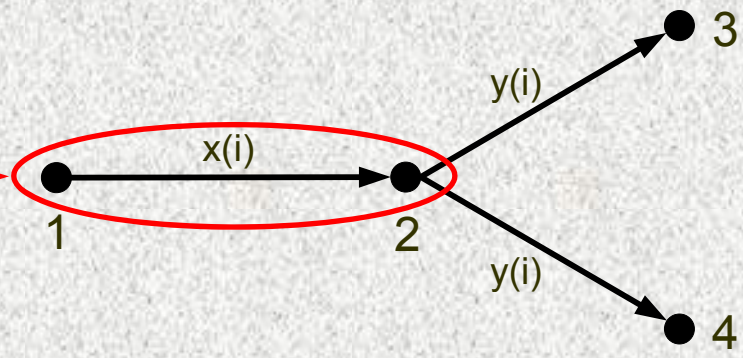
Эквивалентные преобразования программ

(суммирование элементов массива)



Эквивалентные преобразования программ

Исполнять только последовательно !



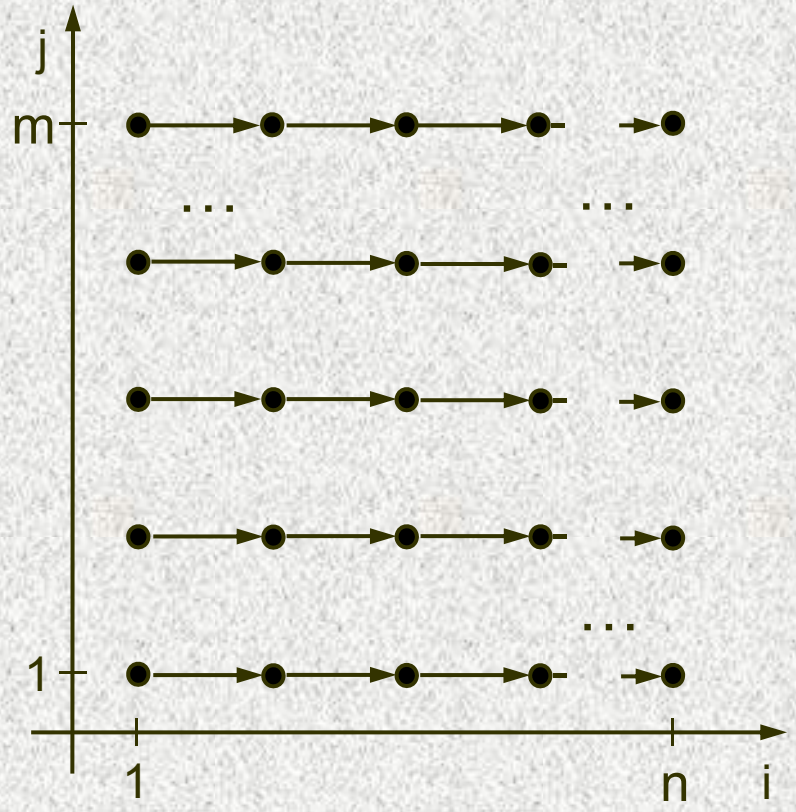
Информационная зависимость определяет критерий эквивалентности преобразований программ.

Информационная независимость определяет ресурс параллелизма программы.

Элементарные преобразования циклов

Перестановка циклов.

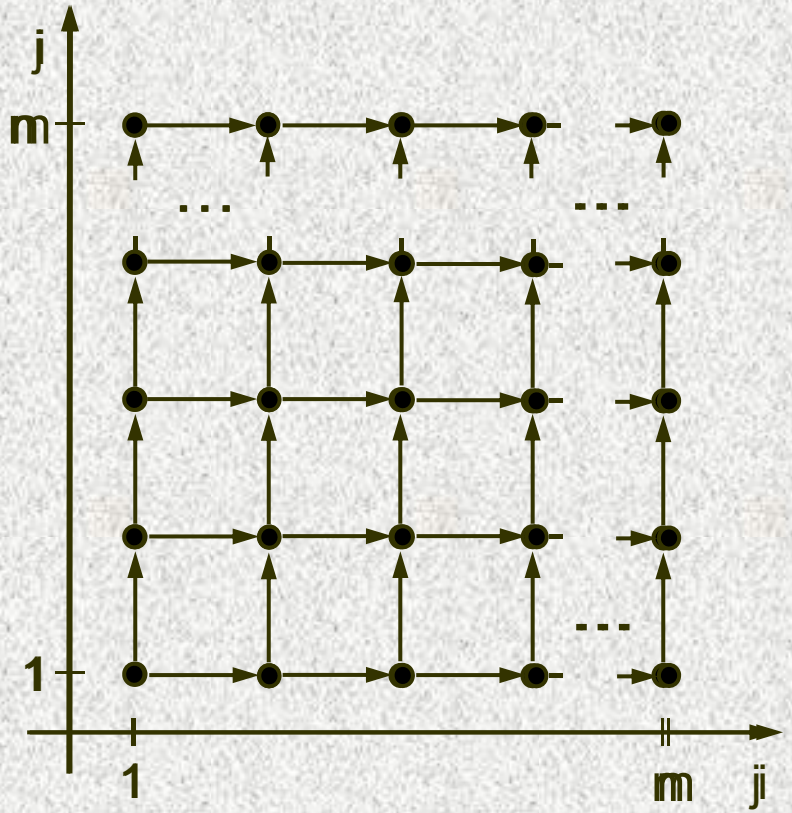
```
for( i = 0; i < n; ++i)
#pragma omp parallel for
    for( j = 0; j < m; ++j)
        A[i][j] = A[i-1][j] + C[i][j]*x;
```



Элементарные преобразования циклов

Перестановка циклов.

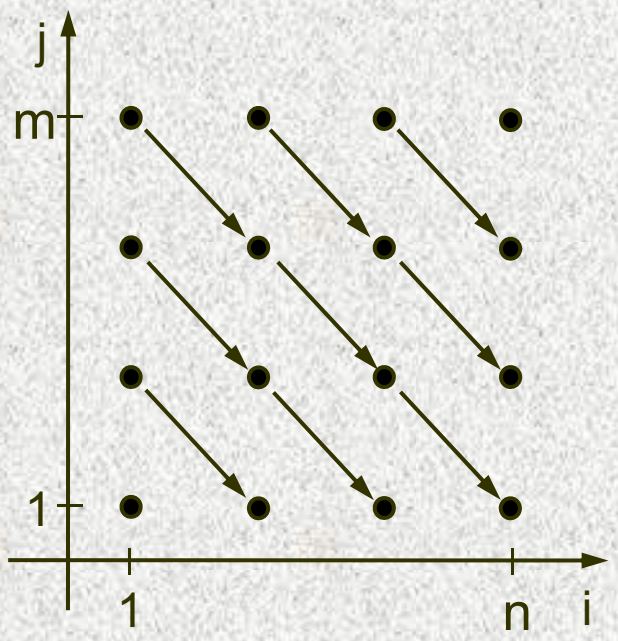
```
#pragma omp parallel for
for( i = 0; i < n; ++i)
    for( j = 0; j < m; ++j)
        A[i][j] = A[i–1][j] + C[i][j]*x;
```



Элементарные преобразования циклов

Всегда ли перестановка циклов является эквивалентным преобразованием?

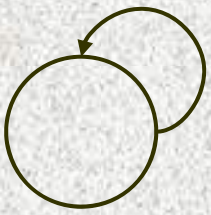
```
for( i = 0; i < n; ++i)
   for( j = 0; j < m; ++j)
      A[i][j] = A[i+c1][j+c2] + C[i][j]*x;

for( i = 0; i < n; ++i)
   for( j = 0; j < m; ++j)
      A[i][j] = A[i–1][j+1] + C[i][j]*x;
```



Элементарные преобразования циклов

Распределение циклов.

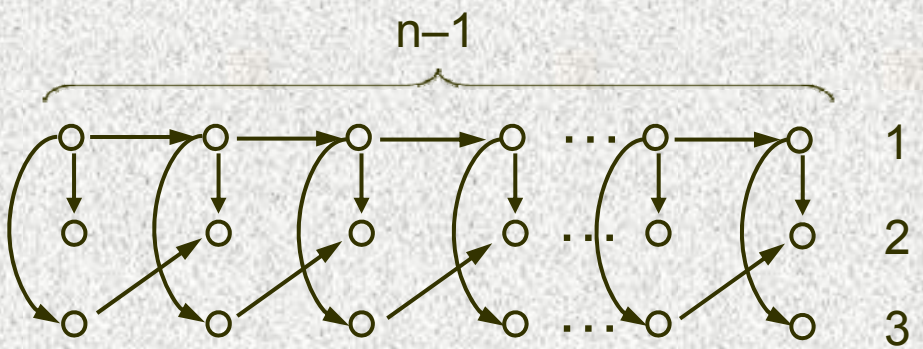
```
   for( i = 1; i < n; ++i) {
1      A[i] = A[i–1]*p + q;
2      C[i] = (A[i] + B[i–1])*s;
3      B[i] = (A[i] – B[i])*t;
   }
```



Элементарные преобразования циклов

Распределение циклов.

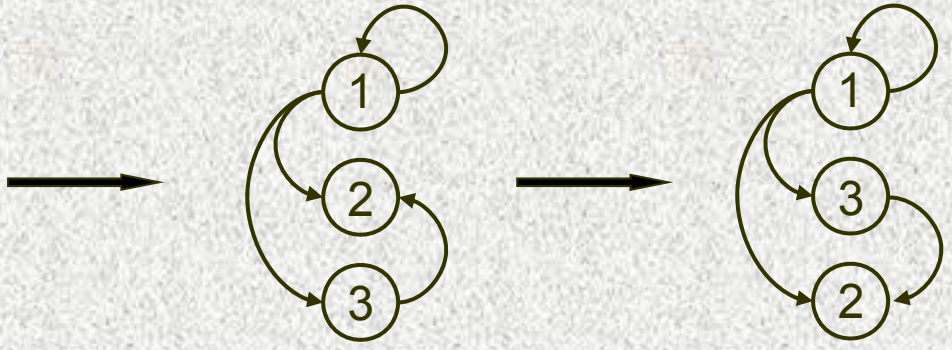
```
   for( i = 1; i < n; ++i) {
1      A[i] = A[i–1]*p + q;
2      C[i] = (A[i] + B[i–1])*s;
3      B[i] = (A[i] – B[i])*t;
   }
```



Элементарные преобразования циклов

Распределение циклов.

```
   for( i = 1; i < n; ++i) {
1      A[i] = A[i–1]*p + q;
2      C[i] = (A[i] + B[i–1])*s;
3      B[i] = (A[i] – B[i])*t;
   }
```



***Утверждение**: для того чтобы можно было выполнить распределение цикла необходимо и достаточно, чтобы распределяемые части находились в разных компонентах сильной связности информационного графа тела данного цикла.*

Элементарные преобразования циклов

Распределение циклов.

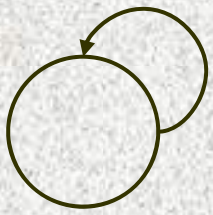
```
for( i = 1; i < n; ++i) {
    A[i] = A[i–1]*p + q;
    C[i] = (A[i] + B[i–1])*s;
    B[i] = (A[i] – B[i])*t;
}
```

```
for( i = 1; i < n; ++i)
    A[i] = A[i–1]*p + q;
#pragma omp parallel for
for( i = 1; i < n; ++i)
    B[i] = (A[i] – B[i])*t;
#pragma omp parallel for
for( i = 1; i < n; ++i)
    C[i] = (A[i] + B[i–1])*s;
```

Элементарные преобразования циклов

Расщепление циклов.

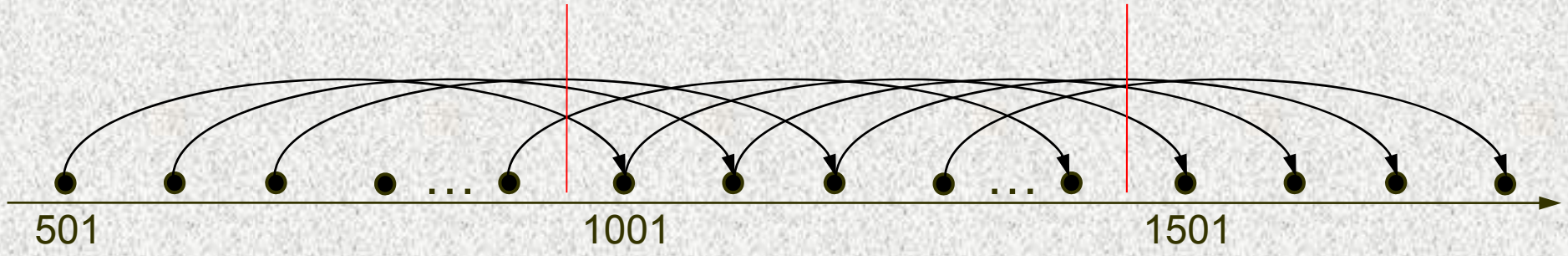
```
for( i = 501; i <= 2000; ++i)
    A[i] = A[i] + A[i–500];
```



Элементарные преобразования циклов

Расщепление циклов.

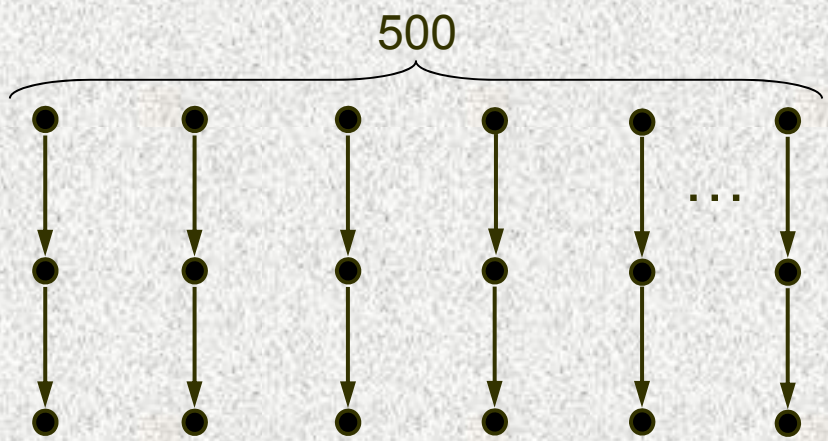
```
for( i = 501; i <= 2000; ++i)
    A[i] = A[i] + A[i–500];
```



Элементарные преобразования циклов

Расщепление циклов.

```
for( i = 501; i <= 2000; ++i)
   A[i] = A[i] + A[i–500];
```




```
#pragma omp parallel for
 for( i = 501; i <= 1000; ++i)
     A[i] = A[i] + A[i–500];
#pragma omp parallel for
 for( i = 1001; i <= 1500; ++i)
     A[i] = A[i] + A[i–500];
#pragma omp parallel for
 for( i = 1501; i <= 2000; ++i)
     A[i] = A[i] + A[i–500];
```

Эквивалентные преобразования программ

Эквивалентно ли преобразование?

```
for( i = 0; i < n; ++i)
    D[i] = D[i] * F[i];
if( m == 3 )
    for( i = 0; i < n; ++i)
        R[i] = P[i] + D[i];
else
    for( i = 0; i < n; ++i)
        R[i] = Q[i] – D[i];
```

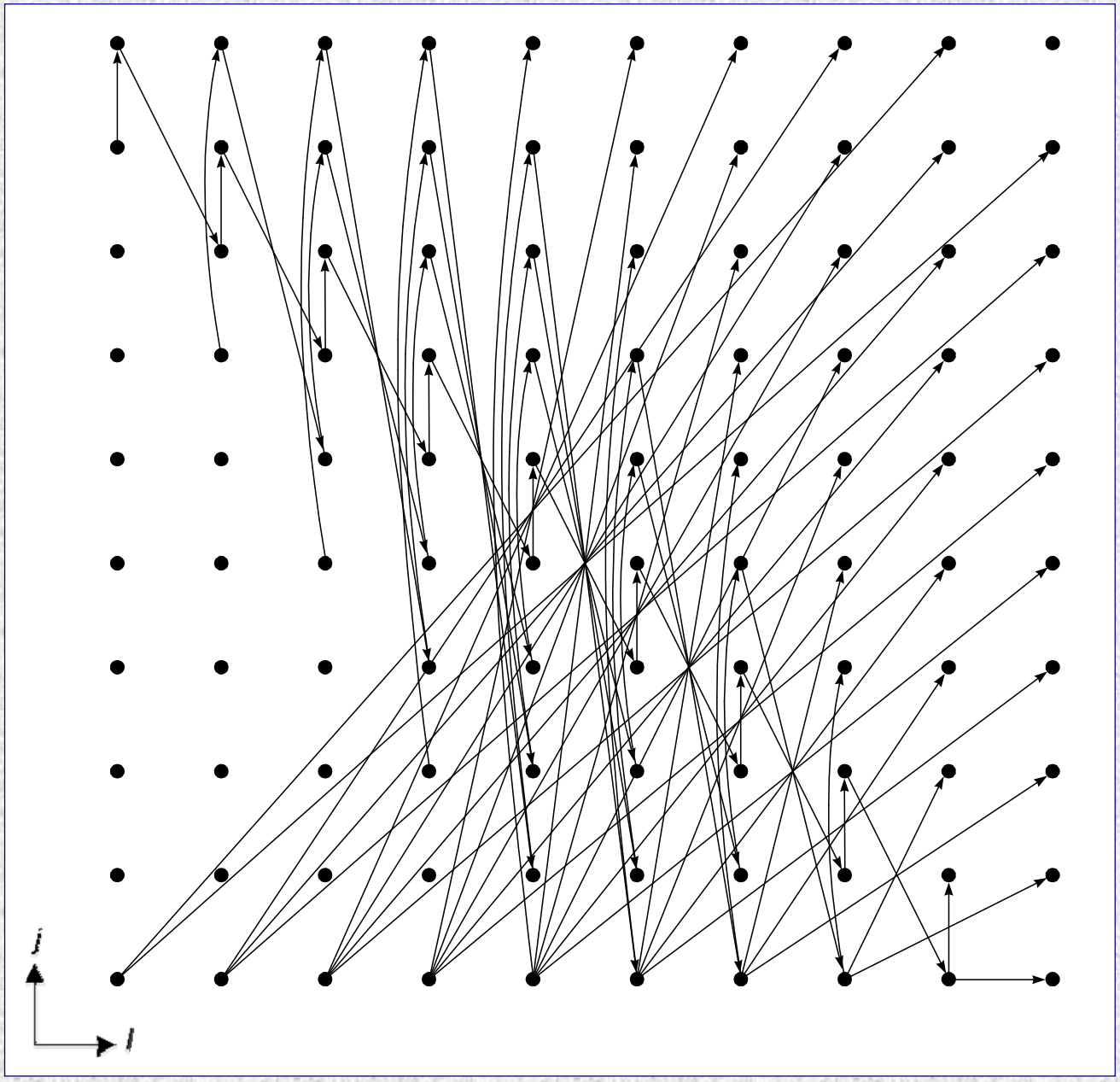


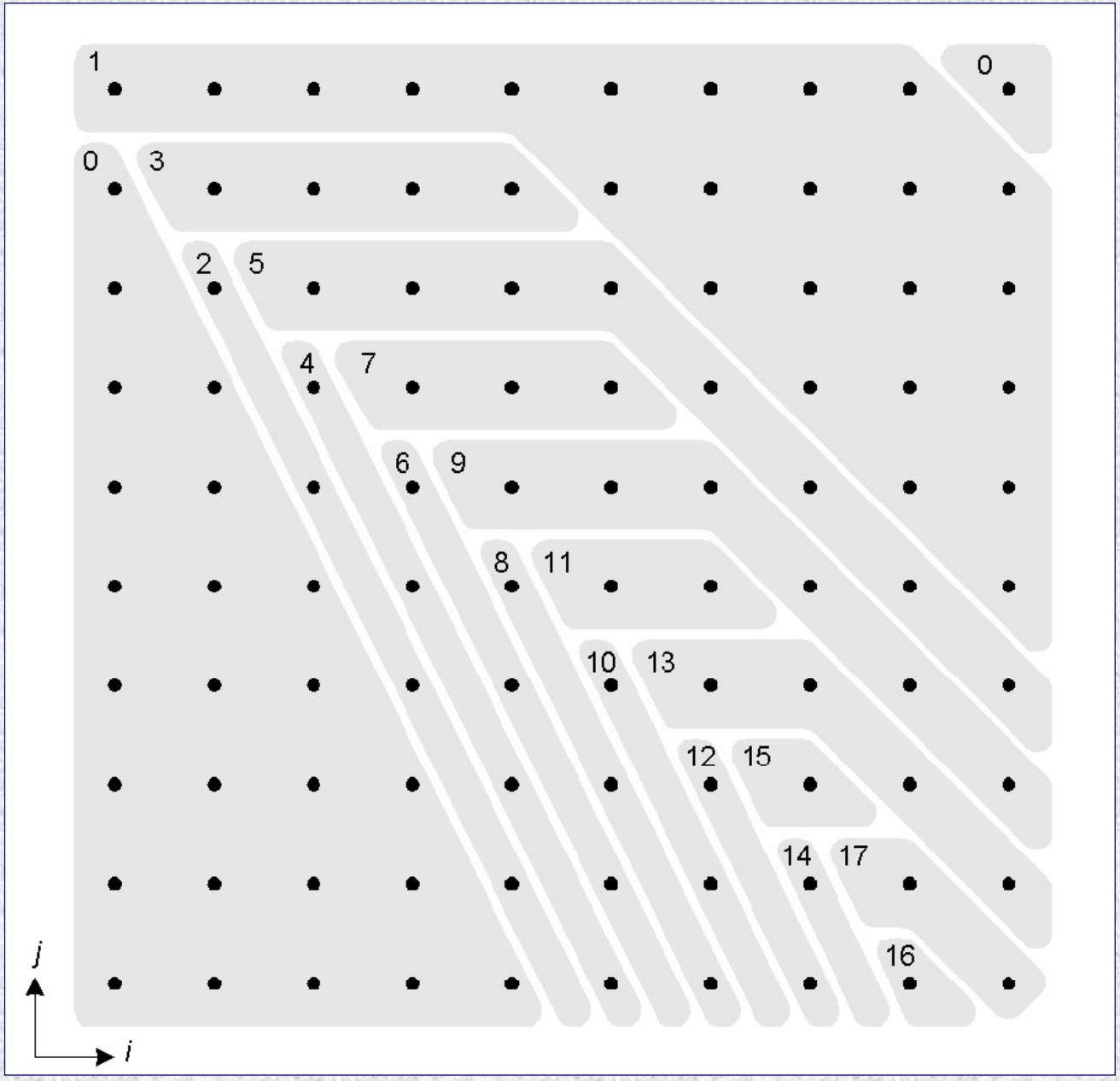
```
if( m == 3 )
    for( i = 0; i < n; ++i)
        R[i] = P[i] + D[i] * F[i];
else
    for( i = 0; i < n; ++i)
        R[i] = Q[i] – D[i] * F[i];
```

Простой пример…

(последовательный вариант)

```
DO  i = 1, n
      DO j = 1, n
         U( i + j ) = U( 2*n – i – j + 1)*q + p
      EndDO
EndDO
```

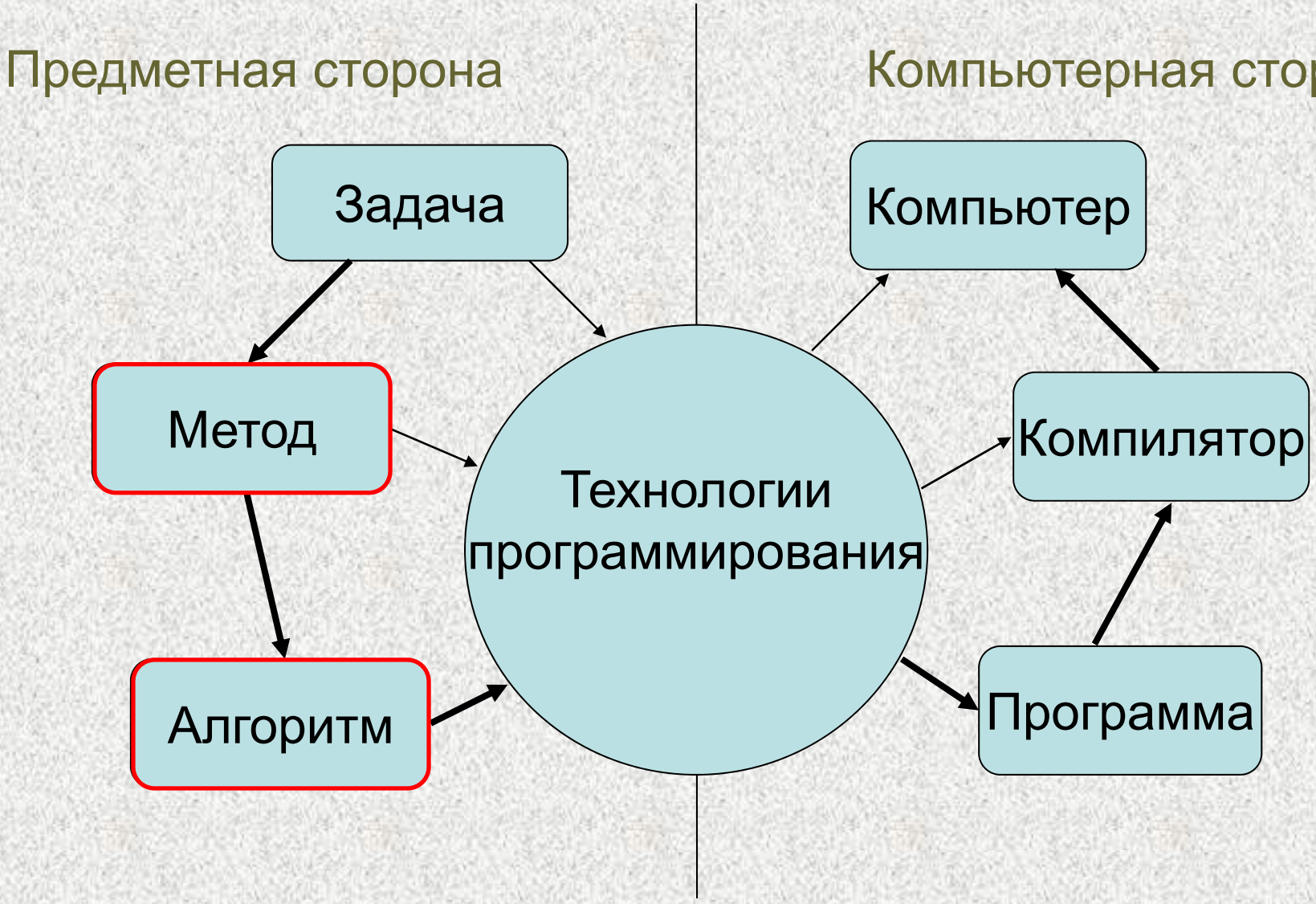

j
i


1
0
0
3
2
5
4
7
6
9
8
11
10
13
12
15
14
17
16
j
i

Совсем не простой пример…
(параллельный вариант)

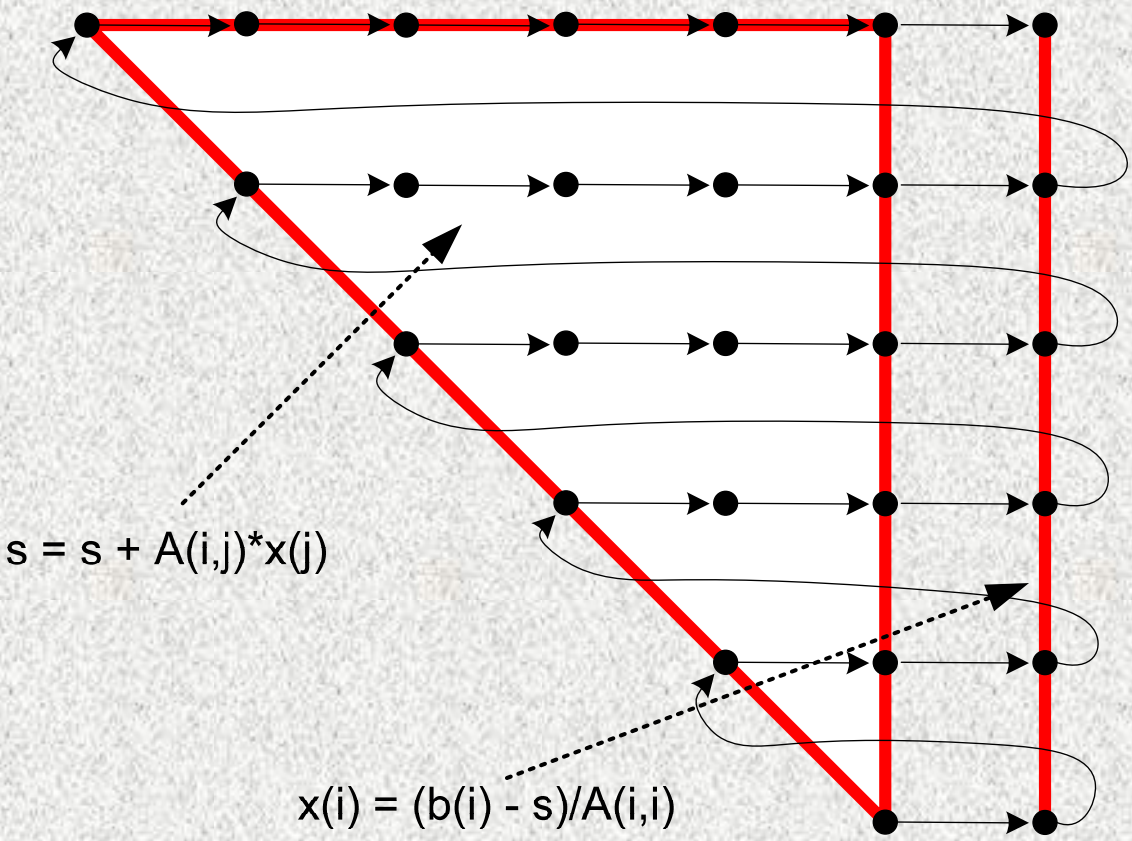
```
DO  i = 1, n
    DO  j = 1, n – i      Параллельный цикл !
        U( i + j ) = U( 2*n – i – j + 1)*q + p
    End DO
    DO j = n – i + 1, n   Параллельный цикл !
        U( i + j ) = U( 2*n – i – j + 1)*q + p
    End DO
End DO
```

Решение задачи на компьютере



Решение СЛАУ: от метода к алгоритму

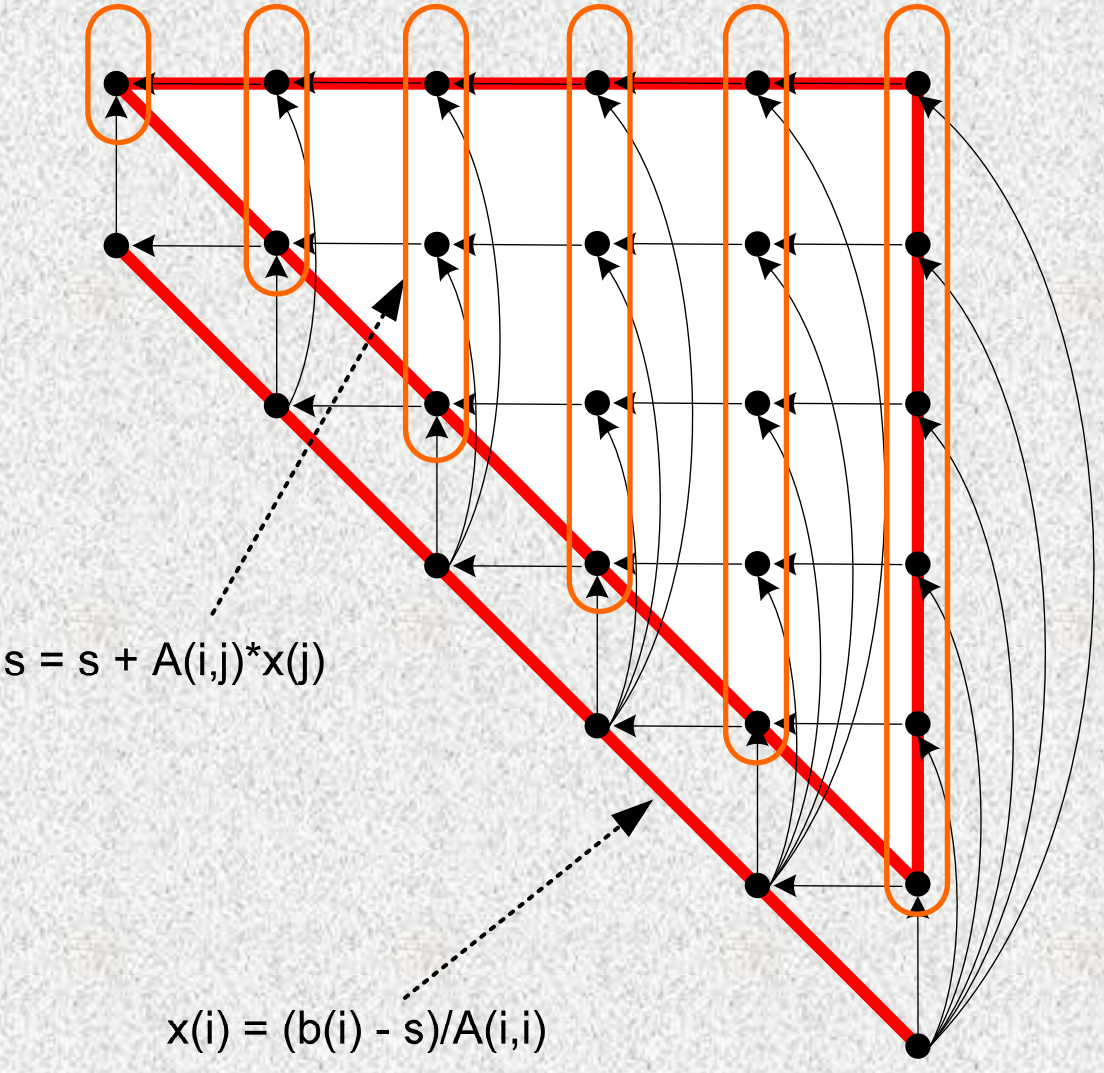
(информационная структура)




```
do i = n, 1, -1
   s = 0
   do j = i+1, n
      s = s + A(i,j)*x(j)
   end do
   x(i) = (b(i) - s)/A(i,i)
end do
```

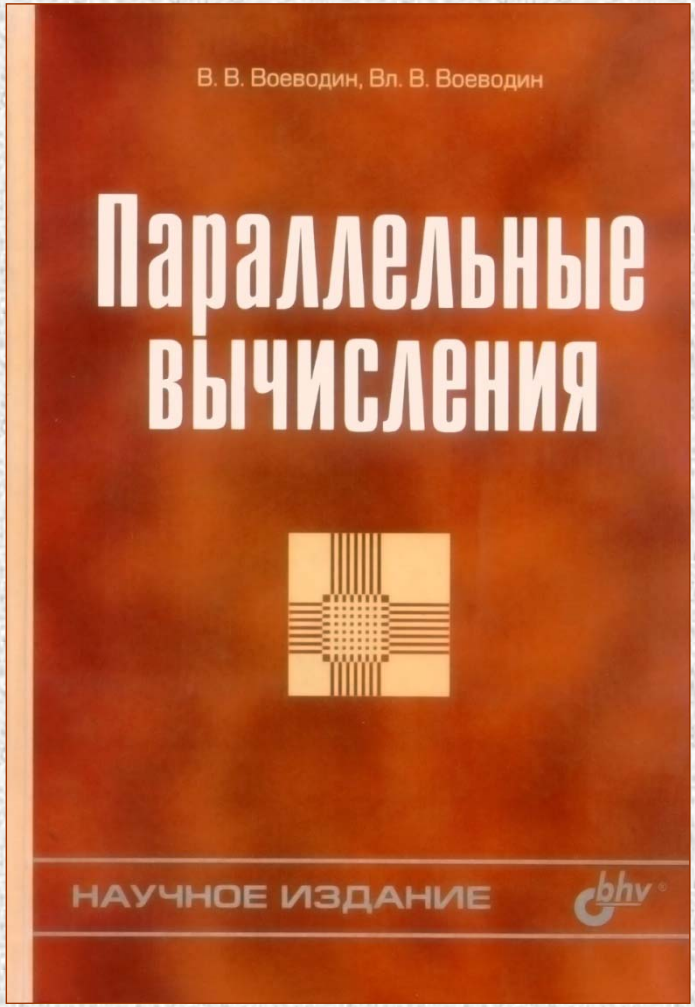
Решение СЛАУ: от метода к алгоритму

(информационная структура)




```
do i = n, 1, -1
   s = 0
   do j = n, i+1, -1
      s = s + A(i,j)*x(j)
   end do
   x(i) = (b(i) - s)/A(i,i)
end do
```

Где узнать больше?



Всероссийская молодежная школа
“Суперкомпьютерные технологии и высокопроизводительные вычисления в образовании, науке и промышленности”

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вл.В.Воеводин
Заместитель директора НИВЦ МГУ,
член-корреспондент РАН,
voevodin@parallel.ru

ННГУ – 26 октября 2009 г.